第15卷第2期
1995年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 15 No. 2
May 1995

二维流形上连续流的一个整体性质*

钱宗铿
(石家庄陆军学院 050083)

摘要 本文研究闭二维流形(闭曲面)上的连续流,证明了正半轨线 ω 极限集的一个性质,其中定理1是平面定性理论中 Poincaré-Bendixson 定理对二维流形的推广.

关键词 二维流形,连续流,ω 极限集,极小集.

分类号 AMS(1991) 58F25/CCL O175.12

众所周知,平面定性理论中研究轨线的 ω 极限集的性态导致了著名的 Poincaré-Bendixson 定理,这个定理对于研究周期解的存在性和稳定性起着非常重要的作用.对于二维流形上的流,由于非平凡 P 稳定轨线(既非奇点又非闭轨线的 P 稳定轨线)可能存在,ω 极限集的结构一般说是非常复杂的.本文研究闭二维流形(闭曲面)上的连续流,改进[1]中引理6.6和定理6.12的结果,证明了正半轨线 ω 极限集的一个性质,本文的主要定理是平面定性理论中 Poincaré-Bendixson 定理对于二维流形的推广.

假设 M^2 是任意的闭二维流形(可分度量的,可定向或不可定向的).$f: M^2\times R\to M^2$ 是 M^2 上的连续流,即 f 连续且对任意的 $x\in M^2$ 及任意的 $t_i\in R, i=1,2$,满足

(1) $f(x,0)=x$;

(2) $f[f(x,t_1),t_2]=f(x,t_1+t_2)$.

记 $f(p,R^+)$ 为正半轨线,$f(p,R^-)$ 为负半轨线,Ω_p 和 A_p 分别表示轨线 $f(p,t)$ 的 ω 极限集和 α 极限集.

定义1 如果 $p\in\Omega_p(A_p)$,称轨线 $f(p,t)$ 为 $P^+(P^-)$ 稳定的,如果轨线 $f(p,t)$ 既是 P^+ 稳定的又是 P^- 稳定的,称轨线 $f(p,t)$ 为 P 稳定的.

定义2 如果 $\overline{f(p,R^+)}(\overline{f(p,R^-)},\overline{f(p,R)})$ 紧,称轨线 $f(p,t)$ 为 $L^+(L^-,L)$ 稳定的.

定义3 正半轨线 $f(p,R^+)$ 均匀的渐近于集合 Ωp,如果对任意 $\varepsilon>0$,存在 $T(\varepsilon)$ 能使当 $L\subset f(p,R^+)$ 是任一时间长度 $\geqslant T(\varepsilon)$ 的轨线弧段,而 q 是 Ω_p 中任意一点时,有

$$\rho(q,L)<\varepsilon.$$

定义4 如果集合 $M\subset M^2$ 是非空的、闭的和不变的,且它的真子集不具有这些性质,称集合 M 为极小集.

为证明主要定理,还需要以下两个引理.

引理1[2] L^+ 稳定轨线 $f(p,t)$ 的 ω 极限集 Ω_p 为极小集的充要条件是正半轨线 $f(p,R^+)$

* 1992年6月24日收到.94年3月24日收到修改稿.

均匀的渐近于 Ω_p.

引理 2 如果正半轨线 $f(p,R^+)$ 的 ω 极限集 Ω_p 中包含一条闭轨线 γ，则 $\Omega_p=\gamma$.

证明 因 M^2 紧，f 的奇点集为 M^2 的紧子集，利用[3]引理 1 证明中的方法可构造 γ 的闭圆环形邻域 N(当 γ 为双侧时)或 γ 的闭 Möbius 带邻域 N(当 γ 为单侧时)不含奇点，且轨线 $f(p,t)$ 当 $t\to\infty$ 时最终进入 N 而不再离开. 当 γ 为双侧闭轨线时，依平面定性论的论证，可得 $\Omega_p=\gamma$. 当 γ 为单侧闭轨线时，闭 Möbius 带邻域 N 只要宽度足够小，N 中便无双侧闭轨线，再利用[3]引理 2，可知 $\Omega_p=\gamma$.

现在证明主要定理.

定理 1 设 M^2 是有限亏格的闭二维流形，f 是 M^2 上的连续流. 如果正半轨线 $f(p,R^+)$ 的 ω 极限集 Ω_p 不含奇点，则 Ω_p 为紧极小集.

证明 Ω_p 紧显然. 如果 Ω_p 包含一条闭轨线 γ，由引理 2，$\Omega_p=\gamma$，定理结论显然成立. 这样，为证定理由[4]命题 5 可设包含在 Ω_p 内的轨线都是非闭的 P 稳定轨线. M^2 紧推得轨线 $f(p,t)$ 为 L^+ 稳定. 因此，欲证 Ω_p 为极小集，由引理 1，只需证明正半轨线 $f(p,R^+)$ 均匀的渐近于 Ω_p.

反证法 假设 $f(p,R^+)$ 不均匀渐近于 Ω_p，此时将存在数 $a>0$，区间叙列 (t_1,t_1')，(t_2,t_2')，…，(t_n,t_n')，…，$(t_n>0,t_n'-t_n\to\infty)$ 及点列 $\{q_n\}\subset\Omega_p$，使得

$$\rho[f(p,t_n,t_n'),q_n]>a,$$

其中 $f(p;t_n,t_n')$ 表示轨线 $f(p,t)$ 从 $t=t_n$ 到 $t=t_n'$ 的弧段. Ω_p 紧，$\{q_n\}$ 必有收敛子列，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}q_n=q_0\in\Omega_p$. 不失一般性，还可进一步假设对任意的自然数 n，$\rho(q_n,q_0)<\dfrac{a}{3}$，因此

$$\rho[f(p;t_n,t_n'),q_0]>\frac{2}{3}a \tag{1}$$

对任意自然数 n 成立.

考虑点列

$$p_n=f(p,t_n+\frac{t_n'-t_n}{2})\overset{\triangle}{=}f(p,\tau_n),\ n=1,2,\cdots.$$

因 $t_n>0$，$t_n'-t_n\to\infty$，故 $\tau_n\to\infty$. 既然已经知道轨线 $f(p,t)$ 为 L^+ 稳定，因此 $\{p_n\}$ 也必有收敛子列，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p_0\in\Omega_p$.

按假定，$f(p_0,t)$，$f(q_0,t)$ 都是非平凡的 P 稳定轨线. 今证 $q_0\in\overline{f(p_0,R)}=\Omega_{p_0}$. 如果 $p\in\Omega_{p_0}$，则由 Ω_{p_0} 为紧不变集，而 $q_0\in\Omega_p$，显然推出 $q_0\in\Omega_{p_0}$. 今设 $p\overline{\in}\Omega_{p_0}$，此时，$p_0$ 为正半轨线 $f(p,R^+)$ 的 ω 极限点，Ω_{p_0} 为紧不变集，因此 Ω_{p_0} 必在 M^2 上无处稠密. 下面区分

(i) $\overline{f(p_0,R)}\cap\overline{f(q_0,R)}=\varnothing$(即 $\Omega_{p_0}\cap\Omega_{q_0}=\varnothing$)；

(ii) $\overline{f(p_0,R)}\cap\overline{f(q_0,R)}=\Omega\neq\varnothing$(即 $\Omega_{p_0}\cap\Omega_{q_0}=\Omega\neq\varnothing$)

两种情况进行讨论.

情形(i)推出 $\overline{f(p_0,R)}$ 与 $\overline{f(q_0,R)}$ 有正距离. 记 $\Gamma=\overline{f(p_0,R)}=\Omega_{p_0}$，$\Gamma$ 为连续统. 过 $p_0\in\Gamma$ 作一局部横截(闭弧)T 不与 $\overline{f(q_0,R)}$ 相交. $f(p_0,t)$ 为非平凡 P 稳定轨线，Ω_{p_0} 在 M^2 上无处稠密，因此 $\Gamma\cap T$ 为无限的完全不连通集合. 又 $p_0\in\Omega_p$ 推出 $\Omega_{p_0}\subset\Omega_p$，从而正半轨线 $f(p,R^+)$ 与 $T-\Gamma$ 相交无限多次. 令 w 是包含 $f(p,R^+)$ 的 $M^2-\Gamma$ 的一个分量，显然 w 包含 $T-\Gamma$ 的无限多个分量. 于是由[4]命题 2，$f(p,R^+)$ 最终将进入一个正不变胞腔 w_1，w_1 的边界包含在 $T_1\cup\Gamma$ 中，其中 $T_1\subset$

T. 而$\overline{f(p_0,R)}$与$\overline{f(q_0,R)}$有正距离且 $f(q_0,t)$为非平凡 P 稳定轨线，因此 $q_0\overline{\in} w_i$，这与 $q_0\in\Omega_p$ 矛盾，故情形(i)不可能发生.

在情形(ii)之下，$\Omega\subset\Omega_{p_0}$ 且 Ω 在 M^2 上无处稠密. 任取一点 $r\in\Omega$，由所作的假定，$f(r,t)$为非平凡 P 稳定轨线，记 $\Gamma=\overline{f(r,R)}=\Omega_r(\subset\Omega)$，$\Gamma$ 为连续统，此时我们断言 $q_0\in\Omega_r$，从而 $q_0\in\Omega\subset\Omega_{p_0}$. 若不然，$q_0\overline{\in}\Omega_r$，过 r 作一局部横截(闭弧)T，仍应用[4]命题 2，推出 $f(q_0,R^+)$最终将进入一个正不变胞腔 w_i，w_i 的边界包含在 $T_i\cup\Gamma$ 中，其中 $T_i\subset T$. 这与 $f(q_0,t)$为非平凡 P 稳定轨线矛盾.

综上所述，知 $q_0\in\overline{f(p_0,R)}=\Omega_{p_0}$，因而有 $\tau_0>0$，使

$$\rho[f(p_0,\tau_0),q_0]<\frac{a}{3}. \tag{2}$$

最后由(1)，(2)将推出矛盾，这一矛盾说明正半轨线 $f(p,R^+)$不均匀渐近于 Ω_p 之假设不成立. 根据流 f 的连续性假设，对$\frac{a}{3}$，存在 $\eta>0$，使当 $\rho(p_0,r)<\eta$ 时

$$\rho[f(p_0,\tau_0),f(r,\tau_0)]<\frac{a}{3}.$$

由 $p_n\to p_0$，$\frac{1}{2}(t_n'-t_n)\to\infty$，因此可取 N 充分大使得

$$\rho(p_0,p_N)<\eta,\ \frac{1}{2}(t_N'-t_N)>\tau_0,$$

从而

$$\rho[f(p_0,\tau_0),f(p_N,\tau_0)]<\frac{a}{3}. \tag{3}$$

$$f(p_N,\tau_0)=f(p,\tau_N+\tau_0)=f(p,t_N+\frac{t_N'-t_N}{2}+\tau_0),$$

$$t_N\leqslant t_N+\frac{t_N'-t_N}{2}+\tau_0\leqslant t_N+t_N'-t_N=t_N'.$$

所以

$$f(p_N,\tau_0)\in f(p;t_N,t_N').$$

由(1)知道

$$\rho[f(p_N,\tau_0),q_0]>\frac{2}{3}a,$$

但从(2)，(3)两式

$$\rho[f(p_N,\tau_0),q_0]\leqslant\rho[f(p_N,\tau_0),f(p_0,\tau_0)]+\rho[f(p_0,\tau_0),q_0]<\frac{2}{3}a,$$

矛盾. 定理证毕.

作为定理 1 的一个应用，现在证明[1]中定理 6.12. 原定理结论中允许的一种情形——环面 T^2 上的奇异情形，却在定理条件中被排除了，显得不太自然. 为把环面 T^2 也包含进来，我们把定理叙述成下面的形式.

定理 2　设 M^2 是有限亏格的闭的连通的二维流形，f 是 M^2 上的连续流. 如果正半轨线 $f(p,R^+)$的 ω 极限集 Ω_p 不包含奇点，则或者 M^2 为环面 T^2 且 $\Omega_p=T^2$，或者 Ω_p 在 M^2 上无处稠密.

证明 由定理 1,Ω_f 为紧极小集. 如果 Ω_f 在 M^2 上非无处稠密,即 Ω_f 包含内点,则根据 Tumarkin 定理[2],Ω_f 为 M^2 上的开子集,于是 Ω_f 为 M^2 的非空的既开且闭的子集,而 M^2 连通,因此 $\Omega_f=M^2$. 但除环面 T^2 与 Klein 瓶 K 外,任何闭二维流形上的连续流 f 必有奇点,且 Klein 瓶 K 上的任何连续流都无非平凡极小集(既非奇点、又非闭轨线的极小集),故 M^2 只能为环面 T^2,即 $\Omega_f=M^2=T^2$. 定理证毕.

注 对于 α 极限集 A_f 有定理 1,2 同样的结论成立.

参 考 文 献

[1] 叶彦谦,曲面动力系统,科学出版社,1991.

[2] N. P. Bhatia, G. P. Szegö,动力系统稳定性理论(中译本),高等教育出版社,1988.

[3] 钱宗铿,射影平面 P^2 上周期轨道的存在性,河北师范大学学报(自然科学版),1—2(1981),14—18.

[4] D. A. Neumann, *Central sequences in flows on 2-manifolds of finite genus*, Proc. Amer. Math. Soc., 61 (1976), 39—43.

A Global Behavior of Continuous Flows on Closed 2-manifolds

Qian Zongkeng

(Shijiazhuang Army Academy, 050083)

Abstract

We prove a global behavior of continuous flows on closed 2-manifolds and give a characterization of w-limit set of positive half-trajectories which is a generalization of the Poincaré-Bendixson theorem in the plane qualitative theory to the 2-manifolds.

Keywords continuous flow, manifold, Poincaré-Bendixson theorem.