# 具一个高阶奇点的Lienard方程的全局性质*

韩茂安　　冯滨鲁
(山东矿业学院数学系，泰安271019)

**摘　要**　本文研究具一个高阶奇点的Lienard方程的极限环的存在性和全局吸引性，所得结果包含了著名的Filippov定理，并且回答了Conti教授提出的一个问题.

**关键词**　Lienard方程，极限性，全局吸引性
**分类号**　AMS(1991) 34C05/CCL O175.12

## 1　引言与主要结果

考虑Lienard方程

$$\dot{x}=y-F(x),\ \dot{y}=-g(x), \tag{1.1}$$

其中$F$、$g$在$(-\infty,\infty)$上连续，且保证初值问题解的存在唯一性. 设$F(0)=0$，$xg(x)>0$，$x\neq 0$，则可引入Filippov变换$z=G(x)=\int_0^x g(u)du$，将(1.1)化为

$$\frac{dz}{dy}=F_i(z)-y,\ i=1,2, \tag{1.2}$$

其中$F_i(z)=F(x_i(z))$，$x_1(z)>0>x_2(z)$为$z=G(x)$的反函数.

**定理1.1**　设(i) $xg(x)>0$，$x\neq 0$，$F(0)=0$，$G(\pm\infty)=\infty$；(ii) 存在$z_0>0$，使$\int_0^{z_0}(F_1(z)-F_2(z))dz>0$，且当$z\geqslant z_0$时$F_1(z)\geqslant F_2(z)$，$F_1(z)\geqslant -a\sqrt{z}$，$F_2(z)\leqslant a\sqrt{z}$，$0\leqslant a<\sqrt{8}$；(iii) 存在$z_1>0$，使当$0<z\leqslant z_1e^k$时$F_1(z)-F_2(z)\leqslant 0(\not\equiv 0)$，当$z_1\leqslant z\leqslant z_1e^k$时$F_1(z)\leqslant a\sqrt{z}$，$F_2(z)\geqslant -a\sqrt{z}$，其中$k=\frac{4a}{\sqrt{8-a^2}}\mathrm{tg}^{-1}\frac{a}{\sqrt{8-a^2}}$，$0\leqslant a<\sqrt{8}$，则方程(1.1)必有稳定极限环.

**注1.1**　如Filippov定理[1]的条件成立，则取$z_1$充分小可使定理1.1的条件(iii)成立，因此定理1.1包含了Filippov定理.

**注1.2**　如取$z_1$为$F_1(z)$的零点，则若当$0<z\leqslant z_1$时$F_1(z)-F_2(z)\leqslant 0$，$\not\equiv 0$，可取$a=0$，使定理1.1的条件(iii)成立.

**注1.3**　由下节知，在定理1.1的条件下原点可以是含有一椭圆域的不稳定奇点，这在Filippov定理等以往的结果中是不可能出现的.

如果(1.1)的一切轨线都以原点为正极限集，则说(1.1)为全局吸引的，此时(1.1)可能有

* 1992年9月15日收到. 94年6月25日收到修改稿. 国家及山东自然科学基金资助.

也可能没有奇闭轨. 如果(1.1)的轨线的正极限集都包含原点,则说(1.1)为全局弱吸引的.

**定理 1.2** 设(i) $F(0)=0, g(-x)=-g(x)$, 当 $x>0$ 时 $g(x)>0, G(+\infty)=\infty$;

(ii) 存在 $z_0>0$, 使当 $z\geqslant z_0$ 时 $F_1(z)\geqslant -a\sqrt{z}, F_2(z)\leqslant a\sqrt{z}, 0\leqslant a<\sqrt{8}$;

(iii) $F(x)=F_0(x)+F_e(x)$, $F_0$ 为奇函数, $F_e$ 为偶函数, 且当 $x>0$ 时 $F_0(x)\geqslant 0, \not\equiv 0$, 当 $x>0$ 充分小时 $F_e(x)\geqslant\sqrt{8G(x)}-G^a(x), a>\dfrac{1}{2}$, 则(1.1)为全局吸引的. 如果再设

(iv) 当 $z>0$ 充分小时 $F_2(z)\geqslant\sqrt{8z}-z^a, a>\dfrac{1}{2}$, 则原点为不稳定的.

意大利数学家 Conti 教授曾提出,对(1.1)而言,全局吸引和全局弱吸引是否等价? 又若(1.1)为多项式系统,它们是否等价? 文[2]通过构造一个分段光滑的例子,对前一问题给出了否定的回答,下面的定理(当 $a=a_0$ 时)对后一问题给出了否定的回答.

**定理 1.3** 考虑五次 Lienard 系统

$$\dot{x}=y-2x^2(1+ax+x^3),\ \dot{y}=-x^3, \tag{1.3}$$

则存在 $-3/4^{1/3}<a_0<0$, 使当 $a<a_0$ 时(1.3)有唯一极限环 $L_a$, 当 $a=a_0$ 时 $L_a$ 已成为(1.3)的最大奇闭轨, 此时(1.3)为全局弱吸引的, 但不是全局吸引的, 当 $a>a_0$ 时(1.3)为全局吸引的.

## 2 主要结果的证明

**定理 1.1 的证明** 由[1]知在条件(i)与(ii)下(1.1)为有界系统,因此只须在条件(iii)下构造一闭曲线,使(1.1)的轨线与其相遇者都由其内部进入其外部. 先考虑方程

$$\frac{dz}{dy}=a\sqrt{z}-y. \tag{2.1}$$

令 $u=y/\sqrt{z}$, 则由(2.1)得 $\dfrac{du}{dz}=\dfrac{u^2-au+2}{2(a-u)z}$, 这是可分离变量的方程, 易求出其通积分为

$$v(u,z)=z(u^2-au+2)\exp\left(\frac{2a}{\sqrt{8-a^2}}\mathrm{tg}^{-1}\frac{a-2u}{\sqrt{8-a^2}}\right)=c.$$

于是(2.1)过点 $A(z_1,0)$ 的积分线为 $v(u,z)$, 其中 $u=y/\sqrt{z}$, 该积分线与等倾线 $y=a\sqrt{z}$ 的交点为 $B(z_1e^k, a\sqrt{z_1e^k})$, 由条件及比较定理知(1.2)$(i=1)$过点 $B_1(z_1e^k, F_1(z_1e^k))$ 的积分线在 $y=F_1(z)$ 下方的部分位于曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的下方, 从而它与负 $y$ 轴相交(不进入原点). 同理, (1.2)$(i=2)$过点 $B_2(z_1e^k, F_2(z_1e^k))$ 的积分线在 $y=F_2(z)$ 上方的部分与正 $y$ 轴相交. 由于当 $0<z\leqslant z_1e^k$ 时 $F_1(z)-F_2(z)\leqslant 0, \not\equiv 0$, 可知(1.2)$(i=1)$过点 $B_1$ 的积分与(1.2)$(i=2)$过点 $B_2$ 的积分线只有唯一交点, 于是返回到 $(x,y)$ 平面即得所需要的闭曲线. 证毕.

**定理 1.2 的证明** 由假设易见对一切 $z>0$ 有 $F_1(z)-F_2(z)\geqslant 0, \not\equiv 0$, 由此知方程(1.1)为全局弱吸引的. 为证明吸引性, 先考虑下述方程

$$\frac{dz}{dy}=\sqrt{8z}-z^a-y,\ a>\frac{1}{2}. \tag{2.2}$$

往证, 存在 $\delta>0$, 使当 $0<z<\delta$ 时(2.2)从等倾线 $y=\sqrt{8z}-z^a$ 上出发的积分线都进入原点. 令

$$R(z)=\sqrt{2z}+z^\beta,\ \beta>\frac{1}{2}\ 待定,$$

显然当 $z>0$ 充分小时 $0<R(z)<\sqrt{8z}-z^{\alpha}$，因此只须证当 $z>0$ 充分小时沿着曲线 $y=R(z)$ 有

$$\frac{dR}{dz}-\left.\frac{dy}{dz}\right|_{(2.2)}\geqslant 0. \tag{2.3}$$

由(2.2)，将 $y=R(z)$ 代入到(2.3)，易知(2.3)等价于 $(2\beta-1)/\sqrt{2}-z^{\alpha-\beta}/\sqrt{2}-\beta z^{\beta-\frac{1}{2}}-\beta z^{\alpha-\frac{1}{2}}\geqslant 0$. 易见只要取 $\frac{1}{2}<\beta<\alpha$，则当 $z>0$ 充分小时上式成立.

现考虑关于 $y$ 轴对称的方程

$$\dot{x}=y-F_e(x),\ \dot{y}=-g(x). \tag{2.4}$$

由于当 $x>0$ 充分小时 $F_e(x)\geqslant\sqrt{8G(x)}-G^{\alpha}(x)$，利用比较定理及对(2.2)所得结论知(2.4)在原点有一椭圆域，且位于 $x$ 轴上方. 设该域的边界为 $L_0$(最大奇闭轨，可能有界，也可能无界)，将(1.1)与(2.4)的轨线作比较知，(1.1)的轨线与 $L_0$ 相遇者都由其外部进入其内部，因此(1.1)在 $L_0$ 上任一常点处的正半轨必以原点为其正极限集，而(1.1)在 $L_0$ 上任一常点处的负半轨必与负 $y$ 轴相交，由此可知(1.1)为全局吸引的.

再设当 $z>0$ 充分小时 $F_2(z)\geqslant\sqrt{8z}-z^{\alpha}$，由比较定理及对(2.2)所得结论知对充分小的 $y_0>0$，(1.1)过点 $(0,y_0)$ 的轨线都以原点为其负极限集，因此(1.1)在原点必有椭圆域. 证毕.

由定理 1.2 知三次系统 $\dot{x}=y-2x^2-x^3,\dot{y}=-x^3$ 为全局吸引的，且原点为不稳定的.

**引理 2.1**[3] 设(1.1)满足(i) $xg(x)>0,F(0)=0$；(ii) 存在 $z^*>0$，使 $F_1(z^*)=F_2(z^*)$，且当 $0<z<z^*$ 时 $F_1(z)<F_2(z)$，当 $z>z^*$ 时，$F_1'(z)\geqslant 0,F_2'(z)\leqslant 0$，则(1.1)至多有一个极限环.

由[4]中定理 4.10 易得

**引理 2.2** 设(1.1)满足(i) $xg(x)>0,x\neq 0,F(0)=0$；(ii) 对一切 $x>0$ 有 $f(x)=F'(x)\geqslant 0$；(iii) 当 $x<0$ 且 $F(x)<0$ 时 $f(x)\geqslant 0$；(iv) 对任何常数 $k\geqslant 1$，存在 $z_k^*>0$，使当 $0<z<G(+\infty)/k^2$ 且 $z\neq z_k^*$ 时 $(z-z_k^*)(H_k(z)-F_2(z))>0$，其中 $H_k(z)=F_1(k^2z)/k$；(v) 当 $z_k^*<z<G(+\infty)/k^2$ 时 $F_2'(z)\leqslant 0,H_k'(z)\geqslant F_2'(z)$，则(1.1)至多有一个极限环.

**定理 1.3 的证明** 首先证明当 $a<0$ 时(1.3)至多有一个极限环. 易知

$$F_i(z)=2[(4z)^{\frac{1}{2}}+(-1)^{i+1}(a(4z)^{\frac{3}{4}}+(4z)^{\frac{5}{4}})], \tag{2.5}$$

$$F_i'(z)=2(4z)^{-\frac{1}{2}}R_i(z), \tag{2.6}$$

其中 $R_i(z)=2+(-1)^{i+1}(3a(4z)^{\frac{1}{4}}+5(4z)^{\frac{3}{4}}),i=1,2$. 又易知

$$R_1'(z)=3(4z)^{-\frac{3}{4}}(a+5(4z)^{\frac{1}{2}}). \tag{2.7}$$

因此当 $z>\frac{1}{4}a^2$ 时 $R_1(z)>R_1(\frac{1}{4}a^2)=2(1+|a|^{\frac{3}{2}})>0,R_2(z)<R_2(\frac{1}{4}a^2)=2(1-|a|^{\frac{3}{2}})\leqslant 0$(当 $a\leqslant -1$ 时)，于是由(2.6)及引理 2.1 知当 $a\leqslant -1$ 时(1.3)至多有一个极限环.

现设 $-1<a<0$，则由(2.7)知 $R_1(z)$ 有极小值 $R_1(\frac{a^2}{100})=\frac{2}{\sqrt{5}}(\sqrt{5}-|a|^{\frac{3}{2}})>0$，于是有 $F_1'(z)>0$，因此引理 2.2 的条件(i)—(iii)成立. 由(2.5)知 $H_k(z)=2[(4z)^{\frac{1}{2}}+ak^{\frac{1}{2}}(4z)^{\frac{3}{4}}+k^{\frac{3}{2}}(4z)^{\frac{5}{4}}]$，于是

$$H_k(z)-F_2(z)=2(4z)^{\frac{3}{4}}[a(1+k^{\frac{1}{2}})+(1+k^{\frac{3}{2}})(4z)^{\frac{1}{2}}]. \tag{2.8}$$

因此(2.8)的零点为 $z_k^* = \frac{1}{4}[-a(1+k^{\frac{1}{2}})/(1+k^{\frac{3}{2}})]^2$，故引理 2.2 的条件(iv)成立. 由(2.6)知 $F_2''(z) < 0$，故只须再证当 $z > z_k^*$ 时 $H_k'(z) > F_2'(z)$. 事实上，由(2.8)知

$$H_k'(z) - F_2'(z) = 2(4z)^{-\frac{1}{4}}[3a(1+k^{\frac{1}{2}}) + 5(1+k^{\frac{3}{2}})(4z)^{\frac{1}{2}}],$$

当 $z > z_k^*$ 时上式之右为正，于是由引理 2.2 知当 $-1 < a < 0$ 时(1.3)至多有一个极限环.

由定理 1.2 知当 $a \geqslant 0$ 时(1.3)无闭轨.

令 $h(x) = 1 + ax + x^3$，则对 $a < 0$，$h(x)$ 有极小值 $h(\sqrt{-a/3}) = 1 - 2(-a/3)^{\frac{3}{2}}$，因此由定理 1.1 与注 1.2 知当 $a \leqslant -3/4^{\frac{1}{3}}$ 时，(1.3)必有稳定极限环 $L_a$. 由于当 $z > 0$ 充分小时成立 $F_i(z) \geqslant \sqrt{8z}$，$i = 1, 2$，因此 $L_a$ 内含一椭圆域，且当 $a$ 从 $-3/4^{\frac{1}{3}}$ 增加时 $L_a$ 单调缩小，故存在 $a_0 \leqslant 0$，使当 $a = a_0$ 时 $L_a$ 成为(1.3)的最大奇闭轨，此时 $L_{a_0}$ 外侧有一族螺线，它们以 $L_{a_0}$ 为正极限集，由广义旋转向量场的性质，当 $a > a_0$ 时(1.3)不再有闭轨. 因此当 $a \neq a_0$ 时(1.3)的椭圆域的边界的外侧必没有螺线，由定理 1.2，$a_0 < 0$. 证毕.

## 参 考 文 献


[1] 叶彦谦等，极限环论，上海科技出版社，1984.

[2] Han Maoan, *Two problems about pseudolinear systems*, Chin. Scic. Bull., 18(1994), 1497—1502.

[3] F. Albrecht, G. Villari, *On the uniqueness of the periodic solutions of certain lienard equations*, Nonlincar Analysis, Vol. 11, 1267—1277(1987).

[4] 张芷芬、丁同仁等，微分方程定性理论，科学出版社，1985.


# Global Properties of Lienard Equations with a Degenerated Singular Point


*Han Maoan　Feng Binglu*

(Dept. of Math., Shandong Mine Institute, Tai'an 271019)



### Abstract

We discuss the existence of a limit cycle and the global attractivity of Lienard equations. The results cover the well-known Filippov theorem and answer a problem posed by Conti.



**Keywords** Lienard equation, limit cycles, global attractivity.