第15卷第2期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 2
1995年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1995

二次系统存在一类四次曲线分界线环的充要条件(续)*

司成斌　　沈伯骞
(辽宁师范大学数学系，大连 116022)

摘　要　本文给出了二次系统存在一类四次曲线分界线环的充要条件，此类分界线环的方程为 $(y+cx^2)^2-x^2(x-a)(x-b)=0$.

关键词　二次系统，四次曲线，分界线环.
分类号　AMS(1991) 34C05/CCL O175.12

文[1]给出了四次曲线

$$(y+cx^2)^2+x^2(x-a)(x-b)=0\ (abc\neq 0,a\neq b)$$

成为二次系统的极限环与分界线环的充要条件. 现在讨论二次系统具有另一类四次曲线

$$(y+cx^2)^2-x^2(x-a)(x-b)=0\ (abc\neq 0,0<a<b) \tag{1}$$

的情形. 不失一般性，不妨设曲线(1)中 $c>0$，这时曲线(1)的图形如图1所示，其中虚线部分

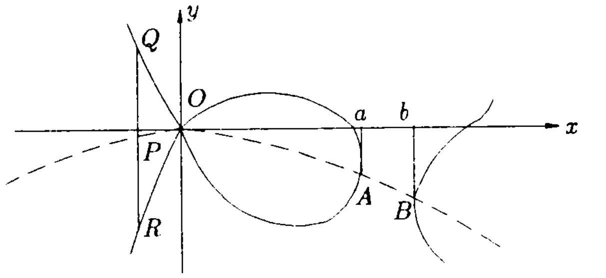

图1

是抛物线 $y+cx^2=0$，任意一条垂直于 x 轴的直线如果与曲线(1)相交于两个点，则这两点间的线段必被抛物线 $y+cx^2=0$ 所二等分. 例如图1中 $\overline{PQ}=\overline{PR}$. 根据文[2]第253页的定理11.1的原理立即可知曲线(1)的无界部分不可能与赤道构成分界线环，这是因为它们都不是凸的. 但是曲线(1)的非孤立闭曲线却是可以成为二次系统的分界线环的. 现在我们就来讨论二次系统存在这种分界线环的充要条件.

定理1　二次系统存在以四次曲线(1)为解的充要条件是此系统可化为以下形式

* 1992年4月13日收到. 94年4月1日收到修改稿.

$$
\begin{cases}
\dot{x} = -4abcx - (a+b)y + 3(a+b)cx^2 + 4xy, \\
\dot{y} = -ab(a+b)x - 4abcy + \left[4abc^2 + \frac{3}{2}(a+b)^2 - 4ab\right]x^2 \\
\qquad + 8(a+b)cxy + 8y^2, \ (c > 0, c \neq 1).
\end{cases} \tag{2}
$$

注意在以后的讨论中，我们都是在假定 $c>0,c\neq 1$ 的条件下进行的. 因为当 $c=1$ 时曲线(1)实际上是三次曲线，当 $c=0$ 时具有曲线解(1)的二次系统无焦点.

证明 设二次系统

$$
\begin{cases}
\dot{x} = a_0 + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\
\dot{y} = b_0 + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2
\end{cases} \tag{3}
$$

具有四次曲线解

$$F(x,y) = (y + cx^2)^2 - x^2(x-a)(x-b) = 0, \ (c \neq 1, c > 0).$$

由公式$\frac{\partial F}{\partial x}P+\frac{\partial F}{\partial y}Q\equiv F(\alpha x+\beta y+\gamma)$比较系数得以下关于未知数 $a_0,a_{10},a_{01},a_{20},a_{11},a_{02},b_0,b_{10},b_{20},b_{11},b_{02},\alpha,\beta,\gamma$ 的 16 个方程

$$4(c^2-1)a_{20} = (c^2-1)\alpha, \tag{4$_1$}$$

$$4(c^2-1)a_{11} = (c^2-1)\beta, \tag{4$_2$}$$

$$4(c^2-1)a_{02} = 0, \tag{4$_3$}$$

$$4(c^2-1)a_{10} + 3(a+b)a_{20} - 2cb_{20} = (c^2-1)\gamma + (a+b)\alpha, \tag{4$_4$}$$

$$4ca_{20} + 4(c^2-1)a_{01} + 3(a+b)a_{11} + 2cb_{11} = 2c\alpha + (a+b)\beta, \tag{4$_5$}$$

$$4ca_{11} + 3(a+b)a_{02} + 2cb_{02} = 2c\beta, \tag{4$_6$}$$

$$4ca_{02} = 0, \tag{4$_7$}$$

$$4(c^2-1)a_0 + 3(a+b)a_{10} - 2aba_{20} + 2cb_{10} = (a+b)\gamma - ab\alpha, \tag{4$_8$}$$

$$4ca_{10} + 3(a+b)a_{01} - 2aba_{11} + 2b_{20} + 2cb_{01} = 2c\gamma - ab\beta, \tag{4$_9$}$$

$$4ca_{01} - 2aba_{02} + 2b_{11} = \alpha, \tag{4$_{10}$}$$

$$2b_{02} = \beta, \tag{4$_{11}$}$$

$$3(a+b)a_0 - 2aba_{10} + 2cb_0 = -ab\gamma, \tag{4$_{12}$}$$

$$4ca_0 - 2aba_{01} + 2b_{10} = 0, \tag{4$_{13}$}$$

$$2b_{01} = \gamma, \tag{4$_{14}$}$$

$$-2aba_0 = 0 \tag{4$_{15}$}$$

$$2b_0 = 0, \tag{4$_{16}$}$$

从方程$(4)_1$—$(4)_4$,$(4)_6$,$(4)_7$,$(4)_9$—$(4)_{16}$这 14 个方程可解出 12 个系数 $a_0=0,a_{10}=\frac{1}{2}\gamma,a_{01}=-\frac{1}{12c}\alpha-\frac{ab}{6(a+b)}\beta-\frac{1}{3(a+b)c}\gamma$, $a_{20}=\frac{1}{4}\alpha$, $a_{11}=\frac{1}{4}\beta$, $a_{02}=0$, $b_0=0$, $b_{10}=-\frac{ab}{12c}\alpha-\frac{a^2b^2}{6(a+b)}\beta-\frac{ab}{3(a+b)c}\gamma$, $b_{01}=\frac{1}{2}\gamma$, $b_{20}=-\frac{c^2-1}{2c}\gamma+\frac{a+b}{8c}\alpha$, $b_{11}=\frac{2}{3}\alpha+\frac{abc}{3(a+b)}\beta+\frac{2}{3(a+b)}\gamma$, $b_{02}=\frac{1}{2}\beta$. 这 14 个方程中有两个方程$(4)_2$,$(4)_9$是不独立，也即是多余的. 再将所解得的系数代入方程$(4)_5$和$(4)_8$得

$$\begin{cases}4(a+b)\alpha-[3(a+b)^2-8ab]c\beta+16\gamma=0,\\2ab(a+b)\alpha-2a^2b^2c\beta+[3(a+b)^2-4ab]\gamma=0.\end{cases}$$

从这两个方程中可解出 $\gamma=-\frac{abc}{2}\beta,\alpha=\frac{3(a+b)c}{4}\beta$. 于是得到 $a_0=0,a_{10}=-\frac{1}{4}abc\beta,a_{01}=-\frac{1}{16}(a+b)\beta,a_{20}=\frac{3(a+b)c}{16}\beta,a_{11}=\frac{1}{4}\beta,a_{02}=0,b_0=0,b_{10}=-\frac{ab(a+b)}{16}\beta,b_{01}=-\frac{abc}{4}\beta,b_{20}=[\frac{3}{32}(a+b)^2+\frac{1}{4}abc^2-\frac{1}{4}ab]\beta,b_{11}=-\frac{(a+b)c}{2}\beta,b_{02}=\frac{1}{2}\beta$,代入系统(3)消去 β 得

$$\begin{cases}\dot{x}=-\frac{1}{4}abcx-\frac{1}{16}(a+b)y+\frac{3}{16}(a+b)cx^2+\frac{1}{4}xy,\\\dot{y}=-\frac{1}{16}ab(a+b)x-\frac{1}{4}abcy+[\frac{3}{32}(a+b)^2+\frac{1}{4}abc^2-\frac{1}{4}ab]x^2\\\qquad+\frac{1}{2}(a+b)cxy+\frac{1}{2}y^2,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dot{x}=-4abcx-(a+b)y+3(a+b)cx^2+4xy,\\\dot{y}=-ab(a+b)x-4abcy+[4abc^2+\frac{3}{2}(a+b)^2-4ab]x^2\\\qquad+8(a+b)cxy+8y^2.\end{cases}$$

至此条件的必要性证毕. 条件的充分性证明略.

下面我们只需讨论系统(2).

定理 2 系统(2)至多有一个不位于四次曲线(1)上的有限远奇点,其坐标为

$$\left(\frac{2ab(a+b)}{3(a+b)^2-8ab},-\frac{4a^2b^2c}{3(a+b)^2-8ab}\right).$$

证明 先解方程组

$$\begin{cases}-4abcx-(a+b)y+3(a+b)cx^2+4xy=0, & (5)\\-ab(a+b)x-4abcy+[4abc^2+\frac{3}{2}(a+b)^2-4ab]x^2+8(a+b)cxy+8y^2=0. & (6)\end{cases}$$

从(5)中解出 y 代入(6)式中,消去 y 经整理和分解因式后得到

$$x\{16(c^2-1)x^2-8(a+b)(2c^2-1)x+[16abc^2-(a+b)^2]\}\cdot\{[4ab-\frac{3}{2}(a+b)^2]x+(a+b)ab\}=0. \quad (7)$$

设 x' 是方程(7)的一个实根,则系统(2)就有一个对应的奇点 (x',y'),其纵坐标 y' 可从(5)式求得 $y'=\frac{-3(a+b)cx'^2+4abcx'}{4x'-(a+b)}$. 系统(2)有限远奇点的个数决定于方程(7)的实根的个数.

再来解方程组

$$\begin{cases}-4abcx-(a+b)y+3(a+b)cx^2+4xy=0, & (5)\\(y+cx^2)^2-x^2(x-a)(x-b)=0. & (1)\end{cases}$$

从(5)中解出 y 代入(1)式中消去 y 经整理和分解因式后得到

$$x^2(x-a)(x-b)\{16(c^2-1)x^2-8(a+b)(2c^2-1)x+[16abc^2-(a+b)^2]\}=0. \quad (8)$$

设 x'' 是方程(8)的一个实根,则系统(2)的垂直倾斜线与四次曲线(5)的交点 (x'',y'') 的纵坐标

可以从(5)式求得 $y''=\dfrac{-3(a+b)cx''^2+4abcx''}{4x''-(a+b)}$. 可以看出方程(7)中只有一个根不是方程(8)的根，也就是说，系统(2)至多只有一个不位于四次曲线(1)上的有限远奇点，其坐标为(x_0,y_0)

$$x_0=\frac{2ab(a+b)}{3(a+b)^2-8ab},\quad y_0=\frac{-4a^2b^2c}{3(a+b)^2-8ab}.$$

至此定理 2 证毕.

现在来讨论系统(2)存在代数分界线环的充要条件.

定理 3 系统(2)存在以四次曲线(1)的非孤立闭曲线为内含焦点的分界线环的充要条件为

$$16abc^2-(a+b)^2\leqslant 0\ (c\neq 1), \tag{9}$$

且以下条件之一成立

(i) $4(a-b)^2c^2-(3a-b)(a-3b)<0$, (10)

(ii) $4(a-b)^2c^2-(3a-b)(a-3b)\geqslant 0$, (11)

$c^2>\dfrac{1}{2}$.

这两种情形存在通常意义下的分界线环.

(iii) $4(a-b)^2c^2-(3a-b)(a-3b)=0$,

$c^2\leqslant\dfrac{1}{2}$.

这时存在的是"无返回映射分界线环"[3].

证明 系统(2)原点处的一次近似行列式为

$$\begin{vmatrix}-4abc & -(a+b)\\ -ab(a+b) & -4abc\end{vmatrix}=ab[16abc^2-(a+b)^2],$$

因 $0<a<b$，所以当 $16abc^2-(a+b)^2\leqslant 0$ 时原点是鞍点或鞍结点. 又从方程(7)知，如果(x_0,y_0)不位于曲线(1)上，则除原点外，位于曲线(1)上的有限远奇点的横坐标必为以下方程的实根

$$16(c^2-1)x^2-8(a+b)(2c^2-1)x+[16abc^2-(a+b)^2]=0. \tag{12}$$

解之得

$$x=\frac{(a+b)(2c^2-1)\pm\sqrt{(a+b)^2(2c^2-1)^2-(c^2-1)[16abc^2-(a+b)^2]}}{4(c^2-1)}, \tag{13}$$

其判别式 $\Delta=(a+b)^2(2c^2-1)^2-(c^2-1)[16abc^2-(a+b)^2]=c^2[4(a-b)^2c^2-(3a-b)(a-3b)]$.

现在就定理 3 的三种条件(i),(ii),(iii)来分别进行讨论.

(i) 当(10)式成立时，在曲线(1)上除原点外不存在其它有限远奇点，又当(9)成立时 0 是鞍点，因此系统(2)存在以四次曲线(1)的非孤立闭曲线的分界线环. 注意当(10)成立时(9)式是不能取等号的，只能取小于号. 这时因为当(10)成立时，$16abc^2-(a+b)^2<\dfrac{4ab(3a-b)(a-3b)}{(a-b)^2}-(a+b)^2=-\dfrac{a^2b^2}{(a-b)^2}(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+b)^2<0$. 不过为了使定理 3 叙述的形式上简洁起见在(9)中写成广义不等式也不妨碍.

(ii) 当(11)式成立时，在曲线(1)上除原点外，还存在其它有限远奇点，其横坐标由(13)表示. 下面我们分$\dfrac{1}{2}<c^2<1$, $c^2>1$ 两种情形来分别进行讨论.

i) 如果$\frac{1}{2}<c^2<1$，注意到条件(9)，可以从(13)式看出，当(9)取小于号时，方程(12)的两个实根均为负. 当(9)取等号时，方程(12)有一个负根和一个零根. 所以方程(12)在区间 $0<x\leqslant a$ 上均无实根. 即在曲线(1)的非孤立闭曲线上除原点是鞍点或鞍结点外无其它奇点，故必为系统(2)的分界线环.

ii) 如果 $c^2>1$，则当(9)式取小于号时，方程(12)有一正一负两个实根，当(9)取等号时，方程(12)有一正根与一个零根. 我们可以证明，方程(12)的正根大于 a，即证明 $\frac{(a+b)(2c^2-1)+\sqrt{(a+b)^2(2c^2-1)^2-(c^2-1)[16abc^2-(a+b)^2]}}{4(c^2-1)}>a$. 即

$$2(b-a)c^2+(3a-b)>-\sqrt{(a+b)^2(2c^2-1)^2-(c^2-1)[16abc^2-(a+b)^2]}. \tag{14}$$

由于 $c^2>1$，所以 $2(b-a)c^2+(3a-b)>2(b-a)+(3a-b)=a+b>0$. 所以不等式(14)是自然成立的. 因此可推知系统(2)存在以四次曲线(1)的非孤立闭曲线分界线环.

(3) 如果 $c^2\leqslant\frac{1}{2}$，这时方程(12)有两个正实根，我们可以证明这两个正实根都不大于 a，为此只需证明较大的正实根不大于 a，即证明

$$\frac{(a+b)(2c^2-1)-\sqrt{(a+b)^2(2c^2-1)^2-(c^2-1)[16abc^2-(a+b)^2]}}{4(c^2-1)}\leqslant a.$$

即

$$2(b-a)c^2+(3a-b)\geqslant\sqrt{(a+b)^2(2c^2-1)^2-(c^2-1)[16abc^2-(a+b)^2]}. \tag{15}$$

当 $3a-b\geqslant 0$ 时，(15)式的左端显然是正的. 可证当 $3a-b<0$ 时，(15)式的左端也是正的. 实际上在条件(11)下有 $c^2\geqslant\frac{(3a-b)(a-3b)}{4(a-b)^2}$，所以

$$2(b-a)c^2+(3a-b)\geqslant 2(b-a)\frac{(3a-b)(a-3b)}{4(a-b)^2}+(3a-b)=\frac{(a+b)(3a-b)}{2(a-b)}>0.$$

于是可以将不等式(15)两边平方得等价不等式

$$4(b-a)^2c^4+4(b-a)(3a-b)c^2+(3a-b)^2\geqslant 4(a-b)^2c^4-(3a-b)(a-3b)c^2.$$

整理化简后即得 $(3a-b)^2(c^2+1)\geqslant 0$，此不等式是自然成立，从而不等式(15)也成立. 这就证明了四次曲线(1)的非孤立闭曲线除原点外还存在两个奇点. 当 $4(a-b)^2c^2-(3a-b)(a-3b)>0$ 时，这两个奇点是位于曲线(1)的非孤立闭曲线上的不同的两个奇点. 一个是鞍点，一个是结点. 因此此闭曲线不能成为系统(2)的分界线环，但是当 $4(a-b)^2c^2-(3a-b)(a-3b)=0$ 时，这两个奇点将重合成为鞍结点. 这时此闭曲线仍可成为系统(2)的分界线环. 只不过这时的分界线环是"无返回映射分界线环"而已.

以上我们已经证明了除条件(i)，(ii)，(iii)之外再不可能存在代数分界线环了.

最后，我们还要证明这些分界线环内必含焦点，这只需证明系统(2)无周期闭轨. 为此取 Dulac 函数 $\Phi(x,y)=B^\alpha=[(y+cx^2)^2-x^2(x-a)(x-b)]^\alpha$，计算得

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Phi P)+\frac{\partial}{\partial y}(\Phi Q)$$
$$=[(y+cx^2)^2-x^2(x-a)(x-b)]^\alpha[4(4\alpha+5)y+2(a+b)c(6\alpha+7)x-8abc(\alpha+1)].$$

令 $a=-\frac{5}{4}$，则得

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Phi P)+\frac{\partial}{\partial y}(\Phi Q)=-cB^{-\frac{5}{4}}[(a+b)x-2ab].$$

因当 $0<a<b$ 时，$\frac{2ab}{a+b}>a$，所以直线 $(a+b)x-2ab=0$ 位于曲线(1)的非孤立闭曲线右边，又因在此闭曲线外侧无奇点，所以系统(2)全平面无周期闭轨. 定理 3 证毕.

注意当 $a=b$ 时，四次曲线(1)变成两条抛物线 $y+(c-1)x^2+ax=0$ 和 $y+(c+1)x^2-ax=0$，而二次系统是不可能同时存在两条抛物线解的，所以当 $a=b$ 时，二次系统是不可能存在分界线环的.

至于二次系统除了可以存在四次曲线

$$(y+cx^2)^2\pm x^2(x-a)(x-b)=0$$

分界线环外，还可不可能存在其它形式的四次曲线分界线环，或者更高次曲线分界线环呢？尚有待于继续探讨.

参 考 文 献

[1] Shen Boqian, *A sufficient and necessary condition of the existence of quartic curve limit cycles and separatrix cycle in a certain quadratic system*, Ann. of Diff. Eqs., Vol. 7, No. 3, 1991, 282—288.

[2] 叶彦谦等，极限环论，上海科学技术出版社，253，1984.

[3] 沈伯骞，二次系统的"椭圆分界线环"，应用数学学报，1992(2)，174—183.

Note on a Quadratic System

Si Chengbin Shen Boqian

(Liaoning Normal University)

Abstract

We obtain a necessary and sufficient condition for the existence of a type of quartic curve separatrix cycles in the quadratic system.

Keywords quadratic system, quartic curve, separatrix cycle.