第15卷第2期
1995年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 15 No. 2
May 1995

系数连续的随机泛函型微分方程解的存在性*

王向东　　　　张道法
(郑州轻工业学院基础部，450002)　(中国科学院研究生院)

摘　要　本文是[1]的继续，证明了对于随机泛函型微分方程在系数不满足 Lipschitz 条件时解的存在性.

关键词　滤波，概率空间，连续映，随机泛函微分方程.

分类号　AMS(1991) 34F05, 46S50/CCL O177, O189.2

§1　引　理

本文完全采用文献[1]的记号，这里不再重述.

令 $I_a=[0,a]$，$B_\beta=\{\psi\in\mathscr{L}^2(\Omega,C(J,R^n)),\ \|\psi\|\leqslant\beta\}$，$\mathscr{A}(a,\beta)=\{y\in C([0,a],\mathscr{L}^2(\Omega,C(J,R^n))),y_0(\omega)=0,y_t\in B_\beta,t\in I_a\}$.

引理1　设开集 $E\subseteq[0,d]\times\mathscr{L}^2(\Omega,C(J,R^n))$，$W\subseteq E$ 是紧集，$H^0\in C(E,\mathscr{L}^2(\Omega,R^n))$，则存在 W 的一个邻域 $V\subseteq E$ 使 $H^0|_V\in C_b(V,\mathscr{L}^2(\Omega,R^2))$，存在 H^0 的邻域 $U\subseteq C_b(V,\mathscr{L}^2(\Omega,R^n))$ 及正常数 M,a_1,β_1，使得

$$\|H(\sigma,\varphi(\omega))\|\leqslant M,\text{对}(\sigma,\varphi)\in V\text{和}H\in U.\tag{1.1}$$

对 $(\sigma^0,\varphi^0)\in W$，我们有 $(\sigma^0+t,y_t+\tilde{\varphi}^0_{\sigma^0+t})\in V$ 对 $t\in I_{a_1}$ 及 $y\in\mathscr{A}(a_1,\beta_1)$，这里 $\tilde{\varphi}$ 定义如下

$$\tilde{\varphi}(t)=\begin{cases}\varphi(0),\ t\in[t_1,a],\\ x(t)-y(t-t_1)=\varphi(t-t_1),\ t\in[-r,t_1).\end{cases}$$

证明　因 W 是紧集，H^0 是连续的，所以，存在 M_1，使 $\|H^0(\sigma^0,\varphi^0)\|<M_1$，对 $(\sigma^0,\varphi^0)\in W$. 同样，由 H^0 的连续性，对 $\forall\ (\sigma^0,\varphi^0)\in W$，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \bar{a}_0,\bar{\beta}$，使当 $\psi\in B_{\bar\beta}$，$|t|<\bar{a}_0<\sigma^0$ 时，有

$$\|H^0(\sigma^0+t,\varphi^0+\psi)\|\leqslant M_1+\varepsilon.$$

记 $V_{(\sigma^0,\varphi^0)}=\{(\sigma^0+t,\varphi^0+\psi),|t|<\bar{a}_0,\psi\in B_{\bar\beta}\}\cap E$，则 $V_{(\sigma^0,\varphi^0)}$ 是包含 (σ^0,φ^0) 的一个小开邻域. 让 (σ^0,φ^0) 取遍 W，由 W 的紧性，故可选取有限个 $V_{(\sigma^0,\varphi^0)}$ 覆盖 W，且 $\|H^0(\sigma^0+t,\varphi^0+\psi)\|\leqslant M_1+\varepsilon$，对 $\forall\ (\sigma^0+t,\sigma^0+\psi)\in V_{(\sigma^0,\varphi^0)}$，取 $V=\bigcup\limits_{\text{有限}}V_{(\sigma^0,\varphi^0)}$，使 $V\supset W$. 由 $V_{(\sigma^0,\varphi^0)}\subseteq E$，$\forall\ (\sigma^0,\varphi^0)\in W$ 成立，故 $V\subseteq E$，于是便有

$$\|H^0(\sigma,\varphi(W))\|\leqslant M_1+\varepsilon,(\sigma,\varphi)\in V.$$

记 U 为 H^0 的一个 ε' 邻域，则对 $\forall\ H\in U$，有

$$\|H(\sigma,\varphi(W))\|\leqslant\|H^0(\sigma,\varphi(W))\|+\varepsilon'\leqslant M_1+\varepsilon+\varepsilon',(\sigma,\varphi)\in V.$$

---

* 1992年2月7日收到. 94年4月4日收到修改稿. 国家自然科学基金资助项目.

令 $M=M_1+\varepsilon+\varepsilon'$，即得到(1.1)式.

下证对 $(\sigma^0,\varphi^0)\in W$，有 $(\sigma^0+t,y_t+\tilde{\varphi}^0_{\sigma^0+t})\in V$ 对 $t\in I_{a_1}$，及 $y\in\mathscr{A}(a_1,\beta_1)$.

设 $V^{(1)}_{(\sigma_1^0,\varphi_1^0)},V^{(2)}_{(\sigma_2^0,\varphi_2^0)},\cdots,V^{(n)}_{(\sigma_n^0,\varphi_n^0)}$ 是 W 的一个有限覆盖，取 $\bar{a}=\min\limits_i \bar{a}_0^{(i)}$，$\bar{\beta}=\min\limits_i\bar{\beta}^{(i)}$，取 $0<\beta_1<\bar{\beta}$，选取 a_1 使 $a_1<\bar{a}$ 及 $\|\tilde{\varphi}^0_{\sigma^0+t}-\varphi^0\|\leqslant\bar{\beta}-\beta_1$ 对所有 $(\sigma^0,\varphi^0)\in W,t\in I_{a_1}$. 由于 W 是紧的，故对 $y\in\mathscr{A}(a_1,\beta_1)$，有

$$\| y_t+\tilde{\varphi}^0_{\sigma^0+t}-\varphi^0\|<\beta_1+\bar{\beta}-\beta_1=\bar{\beta}.$$

这样，$(\sigma^0+t,y_t+\tilde{\varphi}_{\sigma^0+t})\in V$. 证毕.

完全类似的方法可证得

引理 2 设开集 $E\subseteq[0,a]\times\mathscr{L}^2(\Omega,C(J,R^n))$，$W\subseteq E$ 是紧的，$G^0\in C(E,\mathscr{L}^2(\Omega,L(R^m,R^n))$，则存在 W 的一个邻域 $V\subseteq E$，使 $G^0\in C_b(V,\mathscr{L}^2(\Omega,L(R^m,R^n))$，存在 G^0 一个邻域 U 及 $M,a_1,\beta_1>0$ 使 $\|G(\sigma,\varphi)\|\leqslant M$，对 $(\sigma,\varphi)\in V,G\in V$. 同样 $(\sigma^0,\varphi^0)\in W$，我们有 $(\sigma^0+t,y_t+\tilde{\varphi}^0_{\sigma^0+t})\in V$ 对所有 $t\in I_{a_1}$ 及 $y\in\mathscr{A}(a_1,\beta_1)$.

引理 3 设开集 $E\subseteq[0,a]\times\mathscr{L}^2(\Omega,C(J,R^n))$，$W\subseteq E$ 是紧集，$H^0\in C(E,\mathscr{L}^2(\Omega,R^n))$，$G^0\in C(E,\mathscr{L}^2(\Omega,L(R^m,R^n))$，$U^1,U^2$ 分别为上述引理所取的 H^0,G^0 的邻域，V^1,V^2 为上述引理所取的 W 的邻域，M、a_1、β_1 如前所述. 若

$$T:W\times{}^1U\times{}^2U\times\mathscr{A}(a_1,\beta_1)\to\mathscr{L}^2(\Omega,C([-r,a_1],R^n)),$$
$$T(\sigma,\varphi,H,G,y)(t)=0,\quad 当\ t\in J,$$
$$T(\sigma,\varphi,H,G,y)(t)=\int_0^t H(\sigma+s,\tilde{\varphi}_{\sigma+s}+y_s)dA(s)$$
$$+\int_0^t G(\sigma+s,\tilde{\varphi}_{\sigma+s}+y_s)dM(s),\ t\in I_{a_1},$$

则 T 是全连续的，且存在一个在 $\mathscr{L}^2(\Omega,C([-r,a_1],R^n))$ 紧集 K，使得

$$T:W\times{}^1U\times{}^2U\times\mathscr{A}(a_1,\beta_1)\to K.$$

进而若 $2Ma_1<\beta_1$，则

$$T:W\times{}^1U\times{}^2U\times\mathscr{A}(a_1,\beta_1)\to\mathscr{A}(a_1,\beta_1).$$

证明 显然，$T:W\times{}^1U\times{}^2U\times\mathscr{A}(a_1,\beta_1)\to\mathscr{L}^2(\Omega,C([-r,a_1],R^n))$，由引理 1，2 得

$$\|T(\sigma,\varphi,H,G,y)(t)-T(\sigma,\varphi,H,G,y)(\tau)\|\leqslant 2M|t-\tau|,$$
$$\|T(\sigma,\varphi,H,G,y)(t)\|\leqslant 2Ma_1$$

对所有 $t,\tau\in I_{a_1}$，如果

$$K=\{g\in\mathscr{L}^2(\Omega,C([-r,a_1],R^n));\ \|g(t)-g(\tau)\|$$
$$\leqslant 2M(t-\tau),\ \|g(t)\|\leqslant 2Ma_1,\forall\ t,\tau\in I_{a_1}\},$$

显然 K 是列紧的. 由于在度量空间中列紧等价于紧，故 K 为紧集，

$$T:W\times{}^1U\times{}^2U\times\mathscr{A}(a,\beta)\to K.$$

若 $2Ma_1<\beta_1$，则 $K\subseteq\mathscr{A}(a_1,\beta_1)$.

下证 T 为全连续算子，由于 $T:W\times{}^1U\times{}^2U\times\mathscr{A}(a_1,\beta_1)\to K$，对任意 $W\times{}^1U\times{}^2U\times\mathscr{A}(a_1,\beta_1)$ 中一有界点集：$\{(\sigma^k,\varphi^k,H^k,G^k,y^k)\}_k$，$\{T(\sigma^k,\varphi^k,H^k,G^k,y^k)\}_k\subseteq K$，由 K 是紧集，故 $\{T(\sigma^k,\varphi^k,H^k,G^k,y^k)\}_k$ 中必有一收敛子列. 故 T 为全连续算子. 证毕.

引理 4[4]　设 U 是 Banach 空间 $X=\mathscr{L}^2(\Omega,C([-r,a_1],R^n))$ 的闭凸子集，$T:U\to U$ 全连续. 则 T 在 U 中具有不动点.

§2　主要结果

记随机延滞泛函微分方程

$$y(t)=\begin{cases}\int_0^t H(\sigma+s,\tilde{\varphi}_{\sigma+s}+y_s)dA(s)+\int_0^t G(\sigma+s,\tilde{\varphi}_{\sigma+s}+y_s)dM(s), & t\in I_{a_1}.\\ 0, & t\in J\end{cases}$$

为随机 RFDE(H,G). 若此方程在某区间 I_{a_1} 内有解，则称此方程有通过 (σ,φ) 的解.

定理 1　设 a_1 如前所述，E 是 $[0,a_1]\times\mathscr{L}^2(\Omega,C(J,R^n))$ 的开子集，

$$H^0\in C(E,\mathscr{L}^2(\Omega,R^n)),G^0\in C(E,\mathscr{L}^2(\Omega,L(R^m,R^n))),$$

若 $(\sigma,\varphi)\in E$，则对于 (σ,φ)，随机 RFDE(H,G) 有解.

进而，若 $W\subseteq E$ 是紧集，及 $H^0\in C(E,\mathscr{L}^2(\Omega,R^n))$，$G^0\in C(E,\mathscr{L}^2(\Omega,L(R^m,R^n)))$，则存在 W 的一个邻域 V，使 $H^0\in C_b(V,\mathscr{L}^2(\Omega,R^n))$，$G^0\in C_b(V,\mathscr{L}^2(\Omega,L(R^m,R^n)))$ 分别有 H^0、G^0 的邻域 $U^1\subseteq C_b(V,\mathscr{L}^2(\Omega,R^n))$，$U^2=C_b(V,\mathscr{L}^2((R^m,R^n)))$ 及 a_1，使对 $\forall$ $(\sigma,\varphi)\in W$，$H\in U^1$，$G\in U^2$，随机 RFDE(H,G) 在 $[\sigma-r,\sigma+a_1]$ 上有通过 (σ,φ) 的解.

证明　令 $W=\{(\sigma,\varphi)\}$，由引理 3 和 4 知 $T(\sigma,\varphi,H,G,\cdot)$ 在 $\mathscr{A}(a_1,\beta_1)$ 中具有不动点，因为 $\mathscr{A}(a_1,\beta_1)$ 是 $\mathscr{L}^2(\Omega,C([-r,a],R^n))$ 中的有界闭凸集，将随机 RFDE(H,G) 中的 H,G 换为 H^0,G^0，则随机 RFDE(H^0,G^0) 有解. 同样，由引理 3 和 4 知，后一结论也成立.

定理 2　设 $E\subseteq[0,a]\times\mathscr{L}^2(\Omega,C(J,R^n))$ 是开集，$(\sigma^0,\varphi^0)\in E$，$H^0\in C(E,\mathscr{L}^2(\Omega,R^n))$，$G^0\in C(E,\mathscr{L}^2(\Omega,L(R^m,R^n)))$ 及 x_0 是随机 RFDE(H^0,G^0) 通过 (σ^0,φ^0) 的解. 在 $[\sigma^0-r,b]$ 上它是存在唯一的. 设 $W^0\subseteq E$ 是紧集，定义为 $W^0=\{(t,x_t^0);t\in[\sigma^0,b]\}$. 令 V_1^0,V_2^0 分别是使得 H^0,G^0 有界的 W^0 的邻域，若 $(\sigma^k,\varphi^k,H^k,G^k)(k=1,2,\cdots)$ 满足当 $k\to\infty$ 对 $\sigma^k\to\sigma^0$，φ^k 依概率在区间 J 上一致收敛到 φ^0，在 V^0 上，H^k 依概率一致收敛到 H^0，G^k 依概率一致收敛到 G^0，则存在 k_0，当 $k\geqslant k_0$ 时，随机 RFDE(H^k,G^k) 在 $[\sigma^k-r,b]$ 上存在通过 (σ^k,φ^k) 的解 $x^k=x^k(\sigma^k,\varphi^k,H^k,G^k)$，且 x^k 在 $[\sigma^0-r,b]$ 上一致收敛(依概率)到 x^0. 所有的 x^k 未必定义在 $[\sigma^0-r,b]$ 上，但由于 x^k 在 $[\sigma^0-r,b]$ 上一致收敛，所以对 $\forall$ $\varepsilon>0$，$\exists$ $k_1(\varepsilon)$，使当 $k\geqslant k_1(\varepsilon)$ 时，$x^k(t)$ 定义在 $[\sigma^0-r+\varepsilon,b]$ 上，且强范数 $\|x^k-x^0\|_{\mathscr{L}^2(\Omega,C([\sigma^0-r+\varepsilon,b],R^n))}<\varepsilon$.

证明　由集 $W^0\cup\{(\sigma^k,\varphi^k);k=0,1,2,\cdots\}$ 是紧集，令 $W=W^0\cup\{(\sigma^k,\varphi^k);k\geqslant k_0\}$，对于 k_0 足够大及限制 a_1,β_1，将引理 3 中 V_1,V_2 换成 V_1^0,V_2^0. 由定理 1，通过 (σ^k,φ^k) 的解 $x^k=x^k(\sigma^k,\varphi^k,H^k,G^k)$ 在 $[\sigma^k-r,\sigma^k+a_1]$ 上存在. 这里 a_1 与 k 无关. 进而由引理 3 得：

$$y^k(t)(w)=x^k(\sigma^k+t)-\tilde{\varphi}^k(\sigma^k+t)\in\mathscr{L}^2(\Omega,C([-r,a_1],R^n)),$$

且 $y^k(t)(w)$ 有界. 因此，存在一子列，不妨仍记为 $\{y^k\}_k$，使它在 $[-r,a_1]$ 上一致收敛于 y^*(依概率)，因 $y^k=T(\sigma^k,\varphi^k,H^k,G^k,y^k)$ 及由引理 3，T 全连续，故

$$y^*=T(\sigma^0,\varphi^0,H^0,G^0,y^0)=y^0.$$

由于 y^k 的每一子列都有一致收敛于 y^0 的子列(依概率)，则其整个序列也收敛到 y^0，然后回到

x^k，利用其区间$[\sigma^0-r,\sigma^0+\alpha_1]$的结果，利用步长为 α_1 逐步分割区间法，再由定理 1 即得到定理 2 的结论.

参 考 文 献

[1] 张道法、王向东，随机泛函微分方程的几点注记，曲阜师范大学学报(自然科学版)，16(3)，1990.

[2] Nobyuki LkcDa, Shino Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, Second Edition, North-Holland Mathematical Library, 1988.

[3] S-E. A. Mohammed, *Stochastic Functional Differential Equations*, Pitman Advanced Publishing Program, 1984.

[4] Jack Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag New York, Heidelberg Berlin, 1977.

Existence of Solutions for Stochastic Functional Differential Equations with Continuous Coefficents

Wang Xiangdong

(Dept. of Basic Courses, of Zhengzhou Inst. of Light Indu., 450002)

Zhang Daofa

(Graduate School, Academia Sinica)

Abstract

As a succession of [1], this paper proves existence of solutions for stochastic functional differential equations whose coefficents do not satisfy Lipschitz conditions.

Keywords filtering, probability space, continuous martingale, randomized RFDE.