第15卷第2期　　数学研究与评论　　Vol. 15 No. 2
1995年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1995

关于两种连分式加速收敛方法等价性的一般猜想的证明*

朱功勤　唐烁　　　仲　红
（合肥工业大学数力系，230009）（安徽大学数学系）

摘　要　本文证明了[2]提出的两种连分式加速收敛方法等价性的一般猜想是正确的.

关键词　连分式，加速收敛，等价.

分类号　AMS(1991) 65B05/CCL O241.5

§1　一般猜想

本文所使用的术语与记号参看[1]，[2]. 我们把 P. Levrie 和 A. Beltheel[2] 提出的一般猜想写为如下的定理.

定理1　设 $w_k^{(n)}(k=1,2,\cdots,n=1,2,\cdots)$ 为 $f^{(n)}$ 的逼近序列，满足：

$$w_1^{(n)}=w_1,\quad w_k^{(n)}=\frac{a_{n+1}+w_1w_{k-1}^{(n)}t_{k-1}}{b_{n+1}+w_{k-1}^{(n+1)}+w_1t_{k-1}}. \tag{1}$$

假设

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-w_1(b_{n+1}+w_1)}{a_n-w_1(b_n+w_1)}=t_1,\ t_1\neq 0, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-w_k^{(n)}(b_{n+1}+w_k^{(n+1)})}{a_n-w_k^{(n-1)}(b_n+w_k^{(n)})}=t_k,\ t_k\neq 0(k\geqslant 2). \tag{3}$$

定义一连分式序列 $K(a_n^{(k)}/b_n^{(k)})$，其相应的第 n 项渐近公式为 $s_n^{(k)}(0)$ 满足

$$a_n^{(1)}=\dot{a}_n,\ b_n^{(1)}=\dot{b}_n\quad\forall\ n, \tag{4}$$

$$s_n^{(k)}(0)=s_{n+1}^{(k-1)}(w_1t_{k-1}),\quad \forall\ n,\ k=2,3,\cdots, \tag{5}$$

则有 $s_n(w_k^{(n)})=s_{n+1}^{(k-1)}(w_1t_{k-1})$，$k\geqslant 2$. 其中

$$\dot{a}_1=a_1,\quad \dot{a}_n=a_{n-1}\frac{a_n-w_1b_n-w_1^2}{a_{n-1}-w_1b_{n-1}-w_1^2},\ n\geqslant 2,$$

$$\dot{b}_1=b_1+w_1\quad \dot{b}_n=b_n+w_1-w_1\frac{a_n-w_1b_n-w_1^2}{a_{n-1}-w_1b_{n-1}-w_1^2},\ n\geqslant 2.$$

为了证明这个定理，我们利用连分式等价变换的技巧把连分式序列 $K(a_n^{(k)}/b_n^{(k)})$ 变成它的等价连分式：$K(r_n^{(k)}r_{n-1}^{(k)}a_n^{(k)}/r_n^{(k)}b_n^{(k)})$. 其中 $r_n^{(k)}$ 是根据归纳而得到的，其表达式为 $r_n^{(k)}=$

* 1992年6月15日收到. 94年6月8日收到修改稿. 国家自然科研基金及合肥工业大学校立科研基金资助课题.

$\dfrac{b_{n+1}+w_{k-1}^{(n+1)}+w_1 l_{k-1}}{b_n+w_{k-1}^{(n)}+w_1 l_{k-1}}$. 因而定理 1 的等价定理可以写为：

定理 2 设 $w_k^{(n)}(k=1,2,\cdots,n=1,2,\cdots)$ 为 $f^{(n)}$ 的逼近序列，满足

$$w_1^{(n)}=w_1,\quad w_k^{(n)}=\frac{a_{n+1}+w_1 w_{k-1}^{(n)} l_{k-1}}{b_{n+1}+w_{k-1}^{(n+1)}+w_1 l_{k-1}}. \tag{6}$$

假设

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-w_1(b_{n+1}+w_1)}{a_n-w_1(b_n+w_1)}=l_1,\ l_1\neq 0, \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-w_k^{(n)}(b_{n+1}+w_k^{(n+1)})}{a_n-w_k^{(n-1)}(b_n+w_k^{(n)})}=l_k,\ (l_k\neq 0)\ k\geqslant 2. \tag{8}$$

定义一连分式序列

$$K(r_n^{(k)} r_{n-1}^{(k)} a_n^{(k)}/r_n^{(k)} b_n^{(k)}), \tag{9}$$

其中

$$r_n^{(k)}=\frac{b_{n+1}+w_{k-1}^{(n+1)}+w_1 l_{k-1}}{b_n+w_{k-1}^{(n)}+w_1 l_{k-1}}, \tag{10}$$

它的第 n 项渐近分式为 $s_n^{(k)}(0)$，满足

$$a_n^{(1)}=\dot{a}_n,\quad b_n^{(1)}=\dot{b}_n\quad \forall\ n. \tag{11}$$

$\dot{a}_n,\dot{b}_n$ 的表达式与定理 1 相同.

$$\forall\ n,\ s_n^{(k)}(0)=s_{n+1}^{(k-1)}(w_1 l_{k-1}),\ k=2,3,\cdots, \tag{12}$$

则

$$s_n(w_k^{(n)})=s_{n+1}^{(k-1)}(w_1 l_{k-1})\ (k\geqslant 2). \tag{13}$$

如果证明了定理 2，则猜想得证.

§2 证 明

引理 1([1]p20 定理 2.2) 设 $\{C_n\}$ 和 $\{D_n\}$ 是复数序列. 使得 $C_{-1}=1,C_0=0,D_{-1}=0,D_0=1$, $C_nD_{n-1}-C_{n-1}D_n\neq 0,n\geqslant 0$. 那么，存在唯一可求的连分式 $K(c_n/d_n)$ 且第 n 项分子为 C_n，第 n 项分母为 D_n，且

$$c_1=C_1,\ d_1=D_1$$

$$c_n=\frac{C_{n-1}D_n-C_nD_{n-1}}{C_{n-1}D_{n-2}-C_{n-2}D_{n-1}},\ d_n=\frac{C_nD_{n-2}-C_{n-2}D_n}{C_{n-1}D_{n-2}-C_{n-2}D_{n-1}},\ n\geqslant 2 \tag{14}$$

由连分式 $K(a_n/b_n)$ 和引理 1，我们可以构造一个新的连分式 $K(\tilde{a}_n/\tilde{b}_n)$([5])，使得对任意 $w^{(m)}\in C$. 如果 $a_m-w^{(m+1)}b_m-w^{(m-1)}w^{(m)}\neq 0$，则有

$$\tilde{s}_m(0)=s_m(w^{(m)}),\ m\geqslant 1, \tag{15}$$

其中

$$\tilde{a}_1=a_1,\quad \tilde{b}_1=b_1+w^{(1)},$$

$$\tilde{a}_2=a_2-w^{(1)}b_2-w^{(1)}w^{(2)},\quad \tilde{b}_2=b_2+w^{(2)},$$

$$\tilde{a}_n=a_{n-1}\frac{a_n-w^{(n-1)}b_n-w^{(n-1)}w^{(n)}}{a_{n-1}-w^{(n-2)}b_{n-1}-w^{(n-2)}w^{(n-1)}}\ (n>2), \tag{16}$$

$$\tilde{b}_n=b_n+w^{(n)}-w^{(n-2)}\frac{a_n-w^{(n-1)}b_n-w^{(n-1)}w^{(n)}}{a_{n-1}-w^{(n-2)}b_{n-1}-w^{(n-2)}w^{(n-1)}}\ (n>2). \tag{17}$$

现在,我们用数学归纳法证明定理 2.

证明 当 $k=2$,由[2]知定理成立.

经过简单计算,得到:

$$a_n^{(2)}=a_{n-1}\frac{a_n-w_2^{(n-1)}b_n-w_2^{(n-1)}w_2^{(n)}}{a_{n-1}-w_2^{(n-2)}b_{n-1}-w_2^{(n-2)}w_2^{(n-1)}}, \tag{18}$$

$$b_n^{(2)}=b_n+w_2^{(n)}-w_2^{(n-2)}\frac{a_n-w_2^{(n-1)}b_n-w_2^{(n-1)}w_2^{(n)}}{a_{n-1}-w_2^{(n-2)}b_{n-1}-w_2^{(n-2)}w_2^{(n-1)}}. \tag{19}$$

假设当 $k=m$ 时定理为真. 即有

$$s_n(w_m^{(n)})=s_{n+1}^{(m-1)}(w_1l_{m-1}), \tag{20}$$

且

$$a_n^{(m)}=a_{n-1}\frac{a_n-w_m^{(n-1)}b_n-w_m^{(n-1)}w_m^{(n)}}{a_{n-1}-w_m^{(n-2)}b_{n-1}-w_m^{(n-2)}w_m^{(n-1)}}, \tag{21}$$

$$b_n^{(m)}=b_n+w_m^{(n)}-w_m^{(n-2)}\frac{w_m^{(n-1)}\varepsilon_n^{(m)}-w_1l_{m-1}\varepsilon_{n-1}^{(m)}}{w_m^{(n-2)}\varepsilon_n^{m-1}-w_1l_{m-1}\varepsilon_{n-2}^{(m)}}, \tag{22}$$

$$\varepsilon_n^{(m)}=\frac{a_{n+1}-w_m^{(n)}(b_{n+1}+w_m^{(n+1)})}{b_{n+1}+w_m^{(n+1)}+w_1l_m}. \tag{23}$$

则当 $k=m+1$ 时,记

$$a_n^{(m+1)'}=r_n^{(m+1)}r_{n-1}^{(m+1)}a_n^{(m+1)},\quad b_n^{(m+1)'}=r_n^{(m+1)}b_n^{(m)}. \tag{24}$$

由(12)知

$$s_n^{(m+1)}(0)=s_{n+1}^{(m)}(w_1l_m), \tag{25}$$

$k(a_n^{(m+1)'}/b_n^{(m+1)'})$的第 n 项渐近分式记为 $s_n^{(m+1)'}(0)$. 因而

$$s_n^{(m+1)'}(0)=\frac{A_n^{(m+1)'}}{B_n^{(m+1)'}}=s_n^{(m+1)}(0), \tag{26}$$

$$A_n^{(m+1)'}=A_{n+1}^{(m)}+w_1l_mA_n^{(m)},\quad B_n^{(m+1)'}=B_{n+1}^{(m)}+w_1l_mB_n^{(m)},$$

且 $a_n^{(m+1)'}=a_n^{(m)}\dfrac{a_{n+1}^{(m)}-w_1l_mb_{n+1}^{(m)}-w_1^2l_m^2}{a_n^{(m)}-w_1l_mb_n^{(m)}-w_1^2l_m^2}$.

由(21),(22)得 $a_{n+1}^{(m)},b_{n+1}^{(m)},a_n^{(m)},b_n^{(m)}$ 代入上式,经过计算化简得

$$a_n^{(m+1)'}=a_{n-1}\frac{b_{n+1}+w_m^{(n+1)}+w_1l_m}{b_{n-1}+w_m^{(n-1)}+w_1l_m}\cdot\frac{(w_m^{(n-1)}+\varepsilon_{n-1}^{(m)})\varepsilon_n^{(m)}-w_1l_m\varepsilon_{n-1}^{(m)}}{(w_m^{(n-2)}+\varepsilon_{n-2}^{(m)})\varepsilon_{n-1}^{(m)}-w_1l_m\varepsilon_{n-2}^{(m)}}. \tag{27}$$

类似地再计算 $b_n^{(m+1)'}$. 经过化简得

$$b_n^{(m+1)'}=\frac{b_{n+1}+w_m^{(n+1)}+w_1l_m}{b_n+w_m^{(n)}+w_1l_m}\left[b_n+w_m^{(n)}+\varepsilon_n^{(m)}-w_{m+1}^{(n-2)}\frac{w_{m+1}^{(n-1)}\varepsilon_n^{(m)}-w_1l_m\varepsilon_{n-1}^{(m)}}{w_{m+1}^{(n-2)}\varepsilon_{n-1}^{(m)}-w_1l_m\varepsilon_{n-2}^{(m)}}\right]. \tag{28}$$

对改进的渐近分式序列 $s_n(w_{m+1}^{(n)})$ 构造新的连分式 $k(\tilde{a}_n/\tilde{b}_n)$,它的渐近分式序列为 $\tilde{s}_n(0)$,使得

$$s_n(w_{m+1}^{(n)}) = \tilde{s}_n(0) \tag{29}$$

故由(16),(17)知

$$\tilde{a}_n = a_{n-1}\frac{(w_m^{(n-1)} + \varepsilon_{n-1}^{(m)})\varepsilon_n^{(m)} - w_1 l_m \varepsilon_{n-1}^{(m)}}{(w_m^{(n-2)} + \varepsilon_{n-2}^{(m)})\varepsilon_{n-1}^{(m)} - w_1 l_m \varepsilon_{n-2}^{(m)}}, \tag{30}$$

$$\tilde{b}_n = b_n + w_m^{(n)} + \varepsilon_n^{(m)} - w_{m+1}^{(n-2)}\frac{(w_m^{(n-1)} + \varepsilon_{n-1}^{(m)})\varepsilon_n^{(m)} - w_1 l_m \varepsilon_{n-1}^{(m)}}{(w_m^{(n-2)} + \varepsilon_{n-2}^{(m)})\varepsilon_{n-1}^{(m-1)} - w_1 l_m \varepsilon_{n-2}^{(m)}}. \tag{31}$$

比较(27)、(30)以及(28)、(31)得

$$a_n^{(m+1)'} = r_n^{(m+1)} r_{n-1}^{(m+1)} \tilde{a}_n,\ b_n^{(m+1)'} = r_n^{(m+1)} \tilde{b}_n$$

故 $s_n^{(m+1)'}(0) = \tilde{s}_n(0)$. 再由(26)、(29)知 $s_n^{(m+1)}(0) = s_n^{(m+1)'}(0) = \tilde{s}_n(0) = s_n(w_{m+1}^{(n)})$.

又由(12)得 $s_n(w_{m+1}^{(n)}) = s_{n+1}^{(m)}(w_1 l_m)$. 即当 $k=m+1$ 时,定理为真.

所以综上所述,对 $k=2,3,\cdots$命题为真.

参 考 文 献

[1] W. B. Jones and W. J. Thron, *Continued fractions analytic theory and applications*, Encyclopedia of mathematics and its application 11.

[2] P. Levric and A. Bultheel, *A note on two convergence acceleration methods for ordinary continued fractions*, J. Comp. Appl. Math., 24(1988), 403—409.

[3] L. Jacobsen and H. Waadeland, *Convergence acceleration of limit periodic continued fraction under asymptotic side conditions*, Numer. Math., 53(1988), 285—298.

[4] C. Brezinski, *Successive modification of limit periodic continued fraction*, J. Comput. Appl. Math., 19(1987), 67—74.

[5] W. J. Thron and H. Waadeland, *On a certain transformation of continued fractions*, Lecture Notes in Math 932, 225—240.

Proof of a Conjecture on Two Convergence Acceleration Methods for Ordinary Continued Fractions

Zhu Gongqin　*Tang Shuo*

(Hefei Polytecnic Univ.)

Zhong Hong

(Anhui University)

Abstract

We confirm a conjecture in [2] on the equivalence of two convergence acceleration methods for ordinary continued fractions.

Keywords continued fraction, convergence acceleration equivalence.