第15卷第2期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 2
1995年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1995

广义有界变差函数的发展与应用*

盛淑云 陈全德 孙林法
(杭州大学数学系，310028)

摘 要 本文讨论下列问题：

1. 1972年至1992年间广义有界变差函数的定义，性质包括函数类 ΛBV，ΦBV，ΛBMV，$\Phi\Lambda BMV$，$\varphi\Lambda BV$，$\varphi\Lambda BMV$ 等等.

2. 广义有界变差函数在 Fourier 分析及逼近论中的应用.

关键词 广义有界变差函数，Fourier 分析，函数逼近论.

分类号 AMS(1991) 26A45, 42A20/CCL O174.2

自从 1972 年 D. Waterman 提出了 ΛBV 函数空间以后，人们从各种不同的角度拓广实函数中占有重要位置的有界变差函数的概念. 形成了许多新的函数类，并获得了不少有趣的性质. 在此基础上探求其应用，特别是用于 Fourier 级数，使这一经典的数学分支得到新的发展. 本文将着重综合七十年代以来的这方面的一些工作.

1 广义有界变差函数的概念与基本性质

1.1 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且设 $\Phi(x)=\int_0^x\varphi(t)dt$，$\varphi(t)>0$，连续，$\varphi(0)=0$. 假如对区间 $[0,2\pi]$ 作任意分割 $T:0=x_0<x_1<\cdots<x_n=2\pi$，满足 $W_\Phi(f)=\sup\limits_T\sum\limits_{k=1}^{n}\Phi(|f(x_k)-f(x_{k-1})|)<\infty$，则记 $f\in\Phi-BV$[18]. 这是二十世纪初就提出的对有界变差函数的推广. 特别地，当 $\Phi(x)=x^p(p\geqslant1)$ 时，记 $f\in W_p$. 易见 $p=1$ 时，$f\in BV$. 1972 年 Waterman[1] 提出了另一方面的定义：设 $\Lambda=\{\lambda_k\}$ 满足 $\lambda_k>0$，$\lambda_k\nearrow$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-1}=+\infty$. 若对一切不重叠的区间列 $I_n=\{[a_n,b_n]\}$ $([a_n,b_n]\subset[a,b])$，有 $V_\Lambda(f;[a,b])=\sup\limits_{I_n}\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(I_n)|/\lambda_n<+\infty$，$(f(I_n)=f(b_n)-f(a_n))$，则说 $f\in\Lambda BV$，或记为 $f\in\{\lambda_n\}BV$. 当 $\lambda_n=n$ 时，记 $\Lambda BV=HBV$；当 $\lambda_n=1$ 时即为通常的有界变差函数. 如果在 ΛBV 中引进范数 $\|f\|_{\Lambda BV}=V_\Lambda(f)+f(0)$，则 ΛBV 构成 Banach 空间. 简记 $V_\Lambda(f;[a,x])=V_\Lambda[a,x]=V[a,x]=v(x)$，$V_\Lambda(f;[x,b])=V_\Lambda[x,b]=v[x,b]$. 1976 年 Waterman[3] 证明：(i) $V[a,b]\leqslant V[a,x]+V[x,b]$；(ii) 设 $f(x)$ 在 $x=b$ 左连续，则 $V[x,b]\to0(x\nearrow b)$；(iii) 设 $f(x)\in\Lambda BV$，则 $f(x)$ 在 x 处 $(x\in[a,b])$ 为左(右)连续的充要条件是 $V(x)$ 在 x 处左(右)连续. 设 $f\in\Lambda BV$，记 Λ_m

* 1992年6月16日收到. 94年4月26日收到修改稿.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$=\{\lambda_{n+m}\}(m=1,2,\cdots)$. 若 $V_{\Lambda m}(f)\to 0(m\to\infty)$，则说 f 在 Λ 变差下是连续的，并记作 $f\in\Lambda BV_c$. Waterman 提出如何刻划函数类 ΛBV_c. 王[24]首先作了回答. 他证得 $f\in\Lambda BV_c$ 的充要条件是 $f\in\Gamma BV$，这里 $\Gamma=\{\gamma_k\}$，且 $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{-1}=o\{\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^{-1}\}$. 接着邵[28]从另一方面刻划 ΛBV_c，他证明：若 $\lambda_k\sim k^a$ $(0<a<1)$，则 $\Lambda BV_c\subsetneqq\Lambda BV$. 最近 Sablin[13] 又从不同角度得到如下结果：设 $\lambda_n\to\infty$，则存在 $f\in\Lambda BV_c$ 在每一点均无近似导数.

1.2 1984 年施[25]将 ΛBV 函数与 BMO 函数相结合，提出了 Λ 平均变差函数的概念：设 $f\in L$，$I_n=[\alpha_n,\beta_n]$. 若对一切不重叠的区间列 $I_n\subset[a,a+2\pi](a\in R^1)$ 都有 $M_\Lambda(f)=M_\Lambda(f,I)=\sup_{a,I_n}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_{I_n}(f)/\lambda_n<+\infty$，则说 $f\in\Lambda BMV$，其中 $\{\lambda_n\}$ 满足上述条件. $\mu_I(f)=\frac{1}{|I|}\int_I(f(x)-f_I)dx$，$f_I=\frac{1}{|I|}\int_I f(t)dt$. 对于 ΛBV，BMO 与 ΛBMV 三者之间的关系有下列性质[25]：(i)设 $\lambda_n\nearrow+\infty$，那么 $\Lambda BV\subsetneqq\Lambda BMV$；(ii)当 $\lambda_n=O(1)$ 时，有 $f\in\Lambda BMV\Leftrightarrow f\in BV$；(iii) $\Lambda BMV\subsetneqq BMO$. 若引入 ΛBMV 中的范数 $\|f\|_{\Lambda BMV}=M_\Lambda(f)+|\int_0^{2\pi}fdx|$，则 ΛBMV 构成 Banach 空间. 对于 ΛBMV 中的函数又获得如下结果[25]：设 $f\in\Lambda BMV$，x_0 是 f 的一个连续点，则 $\lim_{\delta\to 0}M_\Lambda(f,I_0)=0$，其中 $I_0=[x_0-\delta,x_0+\delta]$.

设 $\varphi(x)\geqslant 0(x\geqslant 0)$ 是凸函数，假如对一切不重叠的区间列 $I_n=[a_n,b_n]$ 及 $I_n=[\alpha_n,\beta_n]\subset[a,a+2\pi]$ 都有 $V_{\varphi\Lambda}=\sup_{I_n}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(|f(I_n)|)/\lambda_n<+\infty$ 及 $M_{\varphi\Lambda}(f)=\sup_{a,I_n}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(I_n(f))/\lambda_n<+\infty$，则分别说 $f\in\varphi\Lambda BV$[8] 及 $f\in\varphi\Lambda BMV$[29]. 当 $\varphi(x)=x^p(p\geqslant 1)$ 时，记 $\varphi\Lambda BV=\Lambda BV_\varphi$ 及 $\varphi\Lambda BMV=\Lambda BMV_p$. 当 $p=1$ 时即为 ΛBV 及 ΛBMV. 显然，$\varphi\Lambda BV\supset\Lambda BV$，$\varphi\Lambda BMV\supset\Lambda BMV$ 与 $\varphi\Lambda BMV\supset\varphi\Lambda BV$.

1.3 最近 Schramm[9] 又定义了一类更为一般的广义有界变差函数：设 $\Phi(x)=\{\varphi_n(x)\}$ 满足如下条件：

$$\begin{cases}\varphi_n(x)\geqslant 0(x>0)\text{ 是凸函数列},\varphi_n(0)=0,\\ \varphi_n(x_1)\leqslant\varphi_n(x_2),(x_1<x_2)\text{ 且 }\varphi_n(ax)\leqslant a\varphi_n(x)(0\leqslant a\leqslant 1).\end{cases}\tag{1.1}$$

假如对一切不重叠的区间列 $I_n\subset[a,b]$ 有 $V_\Phi(f)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(|f(I_n)|)<+\infty$，则说 $f\in\Phi BV$. Schramm 证得：(i) $\Phi BV_0=\{f\in\Phi BV:f(0)=0\}$ 是一 Banach 空间；(ii)设 ΦBV，则当 f 在点 a 右连续时 $V_\Phi(f;a,x)\to 0(x\searrow a)$；$f$ 在 $x=b$ 左连续时 $V_\Phi(f;x,b)\to 0(x\nearrow b)$；(iii)若 $[x,y]\subset[a,b]$，则 $V_\Phi(f;x,y)\to 0(x,y$ 同时趋于 a 或 $b)$.

如果将 ΦBV 与 BMO 两类函数相结合，即设 $\Phi(x)=\{\varphi_n(x)\}$ 满足(1.1)，假设 $M_\Phi(f)=\sup_{a,I_n}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\mu_{I_n}(f))<+\infty$，则说 $f\in\Phi BMV$[26]. 易见，若取 $\varphi_n(x)=\frac{x}{\lambda_n}$，则有 $\Phi BV=\Lambda BMV$，$\Phi BV=\Lambda BV$. 若取 $\varphi_n(x)=\frac{\varphi(x)}{\lambda_n}$ ($\varphi(x)$ 为凸函数)，则有 $\Phi BMV=\varphi\Lambda BMV$，$\Phi BV=\varphi\Lambda BV$. 若 $M_{\Phi m}(f)=\sup_{a,I_n}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n+m}(\mu_{I_n}(f))\to 0(m\to\infty)$，则说 $f\in\Phi BMV_c$ 或说 f 关于 ΦBMV 连续.

1.4 1974 年 Chanturia[23] 提出了变差模的概念：称 $v_f(n)=\sup_{I_k}\sum_{k=1}^{n}|f(I_k)|$ 为 f 的变差模. 当 $v_f(n)=O(v(n))$ 时称 $f\in V[v]$. 类似地称[30] $M_f(n)=\sup_{a,I_k}\sum_{k=1}^{n}\mu_{I_k}(f)$ 为 f 的平均变差模.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

关于广义变差函数与广义变差模的关系最近 Avdishahic[11] 证得：(i) $\lambda_n \nearrow \infty$ 时有 $\Lambda BV \subset V[n/\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{-1}]$；(ii) 设 $\sum_{k=1}^{\infty}\Delta(\lambda_k^{-1})v(k) < \infty$，则 $V[v] \subset \Lambda BV$；(iii) 若 $p>1$，$k\Delta(\lambda_k^{-1}) = O(1)$，则 $V[n/\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k^{-1})^p] \subset \Lambda BV(p>1)$；(iv) 如果 f 具有连续模且 $\sum_{k=1}^{\infty}\Delta(\lambda_k^{-1})k\omega(\frac{1}{k}) < \infty$，则 $C \subset \Lambda BV$（C 为连续函数类）；(v) $V[n^\alpha] \subset \{n^\beta\}BV \subset V[n^\beta]$ $(0<\alpha<\beta<1)$；(vi) $V[n/\lg^p n] \subset \Pi BV \subset V[n/\lg n]$ $(p>1)$；(vii) $\mathrm{Lip}\alpha \subset \{n^\beta\}BV$ $(\alpha>1-\beta)$，$\mathrm{Lip}\alpha \subset \Pi BV$ $(\alpha>0)$. 盛[30]进一步证明：(i) $\varphi\Lambda BV \subset V[\varphi^{-1}(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1})]$；(ii) $\Lambda BMV \subset V[n/\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1}]$，由此还得到 $\Lambda BV_p \subset V[n(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{-1})^{-\frac{1}{p}}]$，$p \geqslant 1$；$\{n^\beta\}BV_p \subset V[n^{1-\frac{1-\beta}{p}}]$ $(p>1, 0<\beta<1)$，$\Pi BV_p \subset V[n(\lg n)^{-\frac{1}{p}}]$ $(p>1)$ 以及 $\{n^\beta\}BMV \subset V[n^\beta]$，显然 $BV_p \supset BV$ $(p \geqslant 1)$，$\Lambda BV \subset BV$. 那么 ΛBV 及 BV_p $(p \geqslant 1)$ 有何关系呢？盛[30]又证得：若 $\beta > 1-\frac{1}{p}$ $(p>1)$，则 $\{n^\beta\}BV \supsetneqq BV_p$ 及 $\{n^\beta\}BMV \supsetneqq BMV_p$. 施、陈[27]证明：若 $\lambda_n \nearrow +\infty$，那么 (i) $\Lambda BV \subset V[v] \Leftrightarrow \Lambda BV_c \subset V[v] \Leftrightarrow n/\lambda_n = O\{v(n)\}$；(ii) $V[v] \subset \Lambda BV \Leftrightarrow V[v] \subset \Lambda BV_c \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\Delta(\frac{1}{\lambda_n})V(n) < \infty$；(iii) $\Lambda BV = V[v] \Leftrightarrow \lambda_n = O(1)$，$v(n) = O(1)$.

1.5 1983 年 Russell 与 Upton[32] 又提出了新的一类广义有界变差函数类. 称 $V_{1,p}(f;a,b) = \sup_{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b}\{\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1}) - f(x_i)|^p\}^{\frac{1}{p}}$，$1 \leqslant p < \infty$ 为 $(1,p)$ 变差. 称 $V_{2,p}^{(1)}(f;a,b) = \sup_{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b}\{\sum_{i=0}^{n-1}|Q(f;x_{i+2},x_{i+1}) - Q(f;x_{i+1},x_i)|^p\}^{\frac{1}{p}}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty, Q(x_i,x_j) = |f(x_j) - f(x_i)|/(x_j - x_i))$ 为 $(2,p)$ 变差. 接着该文又进一步定义新的 $(2,p)$ 变差 $V_{2,p}^{(2)}$ 于下：对 $1 \leqslant p < \infty$，设 $V_{2,p}^{(2)}(f;a,b) = \sup\{\sum_{i=0}^{n-1}|Q(f;x_{2i+3},x_{2i+2}) - Q(f;x_{2i+1},x_{2i})|^p\}^{\frac{1}{p}}$，其中上确界取 $[a,b]$ 上的分割 $(x_i)_0^{2n+1}$ 为偶分割. 若 $1 \leqslant p < \infty$ 且 $a=b$ 时，规定 $V_{2,p}^{(2)}(f;a,a)=0$；若 $V_{2,p}^{(2)}(f;a,b)$ 有限，则记 $f \in B_{2,p}^{(2)}[a,b]$. 类似地定义 $B_{2,p}^{(1)}[a,b]$ 及 $B_{1,p}[a,b]$ 的情形见[17].

对于 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，设 $f \in BV_{2,p}^{(2)}[a,b]$，J. F. Upton[17] 证得：当 p 为有限时，$V_{2,p}^{(2)}(f;a,x)$ 在 $(a,b]$ 左连续；在点 a 右连续，在 (a,b) 未必右连续. $V_{2,p}^{(2)}(f;x,b)$ 在 $[a,b)$ 右连续，在点 b 左连续，在 (a,b) 未必左连续. Upton 又证：若 $f \in BV_{1,p}[a,b]$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 及 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$，则 $F \in BV_{2,p}^{(2)}[a,b]$ 及 $V_{2,p}^{(2)}(F;a,b) \leqslant V_{1,p}(f;a,b)$；若 $F \in BV_{2,p}^{(2)}[a,b]$，则当 $V_{2,p}^{(2)}(F;a,b) = V_{1,p}(f;a,b)$ 时 $F' \overset{\text{a.e.}}{=} f$（$f \in BV_{1,p}[a,b]$ 为有限函数）. 还证得：$V_{2,p}^{(2)}(F;a,b) = V_{2,p}^{(1)}(F;a,b)$ 的充要条件是 $p=1$. 设 $a<c<b$，则当 $F \in BV_{2,p}^{(2)}[a,b]$ 时，对一切 p 有 $F \in BV_{2,p}^{(2)}[a,c]$ 及 $F \in BV_{2,p}^{(2)}[c,b]$.

1.6 1986 年 Ciemnoczolowski 与 Orlicz[10] 在研究广义变差函数的复合函数时又提出了有界 φ 变差函数概念. 设 $\varphi(x)$ 满足条件 $\varphi(0)=0$ 且在 $[0,+\infty)$ 上为不减的，连续的无界函数，那么称 $\varphi(x)$ 为 φ 函数. 对 φ 函数称 $\mathrm{Var}_\varphi(f;a,b) = \sup_{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b}\sum_{i=1}^{n}\varphi(|f(x_i) - f(x_{i-1})|)$ 为 f 在 $[a,b]$ 上的 φ 变差（其中 $f \in X$，X 为实值函数的向量空间，$f(a)=0$）. 称 $V_\varphi[a,b] = \{f \mid f \in X, \mathrm{Var}_\varphi(f) < \infty\}$ 为有界 φ 变差函数类. 当 $\varphi(u) = u^2$ 时，即为 Wiener[14] 定义的 $V_2[a,b]$. 当 $\varphi(u) =$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$u^p(p\geqslant 1)$时，即为 Marcinkiercz[22] 及 Young[15] 所定义的 $V_p[a,b]$类. 对于 $V_\varphi[a,b]$类中的函数，Orlicz[10] 得到如下的结果：设 φ,ψ 都是任意的 φ 函数，且 ψ 满足 Δ_2 性质（所谓 Δ_2 性质即对充分小的 $u\in[0,u_0]$存在常数 k，使 $\varphi(2u)\leqslant k\varphi(u)$）. 若 F_n 是在$(-\infty,+\infty)$上定义的函数，使 $F_n(0)=0(n=1,2,\cdots)$及

$$\sup \mathrm{Var}_\psi(F_n(x),a,b)\leqslant\infty, \tag{1.6.1}$$

则对任意的 $\eta>0$，存在 k_η，使

$$\psi(|F_n(u_2)-F_n(u_1)|)\leqslant k_\eta\varphi(|u_2-u_1|),\ \forall\ u_1,u_2\in[-\eta,\eta]. \tag{1.6.2}$$

反之，由(1.6.2)也可得(1.6.1).

2 在 Fourier 分析中的应用

2.1 Salan[16] 曾证明：若 $f\in\Phi-BV\cap C_{2\pi}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Psi(\frac{1}{n})<\infty(\Psi(x)=\int_0^x\psi(t)dt,\psi$ 为 $\varphi(t)$的逆函数)，则 f 的 Fourier 级数 $\mathfrak{D}[f]$均匀收敛，1972 年 Bernstein[18] 指出：如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Psi(\frac{1}{n})<\infty$，则存在 f 使其 Fourier 级数在某点发散. 假如 $f\in V[v(n)]\cap C_{2\pi}$，那么 $\mathfrak{D}[f]$均敛于 f 的充要条件是 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v(k)/k^2<\infty$. 如果引入记号 $\mu(f,n)\triangleq\sup\limits_{I_k}\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_{I_k}(f)$ 及 $m[v(n)]=\{f:\mu(f,n)=O(v(n))\}$，则当 $f\in m[v(n)]\cap C_{2\pi}$ 时 $\mathfrak{D}[f]$均匀收敛的充要条件亦为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v(k)/k^2<\infty$ [27]. 易知$V[v(n)]\subset m[v(n)]$. 由此可知这是上述结果的改进. 对于 ABV 中的函数 Waterman[1] 证得：若 $f\in ABV$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-\frac{1}{2}}n^{-1}\omega^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{n})$ 单调收敛，则 $\mathfrak{D}[f]$收敛. 若 $f\in HBV$ 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{1}{2}}\omega^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{n})$ 收敛，那么$\mathfrak{D}[f]$为绝对收敛. 如果将条件放宽到 $f\in HBV$，则得到 $\mathfrak{D}(f)$收敛于$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$. 如果继续将条件放宽为 $f\in\{n^{\beta+1}\}BV(-1<\beta<0)$，那么成立着[5]：(i) $f(x)$在第一类间断点处 $\mathscr{D}[f](c,\beta)$有界；(ii)在连续性闭区间上 $\mathfrak{D}[f]$均匀有界；(iii)当 $\alpha>\beta$ 时，在 $f(x)$的第一类间断点处 $\mathfrak{D}[f]$为(c,α)可求和；在连续性闭区间上 $\mathfrak{D}[f]$为(c,β)均匀可和. 盛[28]继续将其条件放宽为 $f\in\{n^{\beta+1}\}BMV(-1<\beta<0)$仍获得上述(i)～(iii)相同的结果. Waterman 接着指出：如果 $ABV\supset\{n^{\beta+1}\}BV(-1<\beta<0)$，则存在 $f\in ABV$ 使其 Fourier 级数在某一点并非(c,β)有界. 1984 年施[25]证明：若 $f\in HBMV$，则其 Fourier 级数收敛于$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$. 显然这是上述 Waterman 定理的改进.

2.2 设 $f\in BV$，Bojanic[39] 考虑用 f 的 Fourier 级数的部分和 $s_n(f,x)=s_n(x)$逼近 f，获得估计式：

$$|s_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{2(1+\frac{2}{\pi})}{n+1}\sum_{k=1}^{n}V(\frac{\pi}{k}), \tag{2.1}$$

其中 $V(t)$表示 $g_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$在$[0,t]$上的全变差，接着 Bojanic 与 Waterman[33] 将 $f\in BV$ 减轻为 $f\in\{n^\alpha\}BV(0<\alpha<1)$得到估计式：

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$|s_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{(2-\alpha)(1+\frac{2}{\pi})}{(n+1)^{1-\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}V(\frac{\pi}{k}),\tag{2.2}$$

1982 年 Waterman[12] 考虑将 $f\in\{n^{\alpha}\}BV$ 改为一般的 $f\in\Lambda BV$. 设 $\frac{\pi}{n+1}=a_n<a_{n-1}<\cdots<a_0=\pi$,则有

$$|s_n(x)-f(x)|\leqslant(1+\frac{2}{\pi})\{\frac{\lambda_{n+1}}{n+1}v(\pi)+\frac{\pi}{n+1}\sum_{i=0}^{n}v(a_i)[H(a_{i+1})-H(a_i)]\},\tag{2.3}$$

其中 $H(t)=\lambda_k/t,t=k\pi/(n+1),k=1,2,\cdots,n+1$. 易见在(2.3)中令 $\lambda_k=1,a_i=\frac{\pi}{i+1}(i=0,1,\cdots,n)$及 $H(t)=\frac{1}{t}$便得(2.1)式;当 $\lambda_k=k^{\alpha},H(t)=t^{\alpha-1}(\frac{\pi}{n+1})^{\alpha},a_i=\frac{\pi}{i+1}$时,可得(2.2). 陈[31]对 ΛBV 中共轭 Fourier 级数的部分和收敛速度进行了研究,得到了类似的结果.

最近孙[21]推广了上述结果,他证得:若 $f\in\Lambda BMV$,则

$$|s_n(x)-\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]|\leqslant 3\omega(\frac{7\pi}{2n+1})+2\pi M_{\Lambda}(\pi)\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}\lambda_k^{-1}$$
$$+2\pi\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}M_{\Lambda}[\frac{4k+3}{2n+1}\pi/k\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{-1}],$$

其中 $\omega(t)=\omega[g_x(0,t)],M_{\Lambda}(t)=M_{\Lambda}[g_x(0,t)],g_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)$. 设 $f\in HBMV$,则

$$|s_n(x)-\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))|\leqslant 3\omega(\frac{7\pi}{2n+1})+2\pi M_H(4n+\varepsilon_n+3)\pi/(2n+1)$$
$$+2\pi M_H/\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}\lambda_i^{-1}+2\pi\sum_{k=[n\varepsilon_n]+1}^{[\frac{n}{2}]+1}M_H((4k+3)\pi/(2n+1)/k\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{-1},$$

其中 $\varepsilon_n\downarrow 0,\lg\varepsilon_n=o(\lg n)$. 如果假设 $\varepsilon_n=\frac{1}{\lg n},f\in HBMV$,那么有

$$s_n(x)-\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))=O(\omega(\frac{7\pi}{2n+1}))+M_H(\frac{4\pi}{\lg n})+(\lg\lg n/\lg n)M_H(\pi).$$

如果假设 $f\in HBV$,则有

$$s_n(x)-\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))=O\{V_H(\frac{4\pi}{\lg n})+(\lg\lg n/\lg n)V_H(\pi)\}.$$

设$\{x_n\}$是一列独立同分布非负随机变量,期望 $E(X_1)=x\in[0,\infty)$,方差为 $\sigma^2(x)(0<\sigma(x)<\infty)$,又设 $s_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$,对 $f(x)$定义 Feller 算子[40]

$$F_n(f,x)=\int_0^{\infty}f(\frac{t}{n})d_tG_{n,x}(t)=E\{f(\frac{s_n}{n})\},$$

其中 $G_{n,x}(t)$是 s_n 的分布函数,f 是 $G_{n,x}$ 可积的. 记 $B_{\Lambda}=\{f|f\in V_r[0,a]$且 $f(x)=O(x^{\Lambda x}),x\to\infty,\Lambda>0\}$.

王、郭[41]证得如下结果:

1° 设$\{x_n\}$如上定义,期望 $x\in(0,\infty)$且 $E(X_1-x)^r<\infty(r\geqslant 2),E(e^{2\Lambda s_n/n})=O(1)$, $s_n=$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

设 $f\in C[-1,1]\cap HBV$，$-1\leqslant\alpha,\beta\leqslant-\frac{1}{2}$，那么对某个数 $c>0$ 有

$$L_n^{(\alpha,\beta)}(f,x)-f(x)=O(1)\{V_H(f,[x-c(\varepsilon_n\sqrt{1-x^2}+\varepsilon_n^2)+c(\varepsilon_n\sqrt{1-x^2}+\varepsilon_n^2)])$$
$$+V_H(f,[-1,1])(\sum_{i=1}^{[n\varepsilon_n]}\lambda_i^{-1})^{-1}+\sum_{k=[n\varepsilon_n]+1}^{n}V_H[f,x-c(\frac{k}{n}\sqrt{1-x^2}+\frac{k^2}{n^2})x$$
$$+c(\frac{k}{n}\sqrt{1-x^2}+\frac{k^2}{n^2})](k\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^{-1})\},\ \varepsilon_n\downarrow 0,\lg\varepsilon_n=o(\lg n).$$

2.4 我们知道[19]若 $f\in BV\cap\mathrm{Lip}\alpha(\alpha>0)$，则 f 的 Fourier 级数绝对收敛，简记为 $\mathfrak{D}[f]\in\Lambda$. Waterman[35] 证明：

(i) 若 $f\in\Lambda BV\cap C_{2\pi}$，$\Lambda=\{\lambda_n\}$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[\lambda_n\omega(\frac{1}{n},f)]^{\frac{1}{2}}/n$ 收敛，则 $\mathfrak{D}[f]\in\Lambda$.

(ii) 又若 $f\in HBV\cap C_{2\pi}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}[\omega(\frac{1}{n},f)/n]^{\frac{1}{2}}<\infty$ 时 $\mathscr{D}[f]\in\Lambda$.

1981 年王[24]认为上述条件太苛刻了，例如(i)中令 $\lambda_n=n\lg n$，则当 $\omega(\frac{1}{n})=O(\frac{1}{n\lg n})$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n\omega(\frac{1}{n}))^{\frac{1}{2}}/n$ 并不收敛. 在(ii)中如果满足条件 $\sum_{n=1}^{\infty}[\omega(\frac{1}{n})/n]^{\frac{1}{2}}<\infty$，则有 $f=$ 常数. 王[24]将上述结果改进为：(i) $f\in\Lambda BV$，$\lambda=\{\lambda_n\}$，及 $\sum_{n=1}^{\infty}(\omega(\frac{1}{n})/n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1})^{\frac{1}{2}}<\infty$ 含有 $\mathfrak{D}[f]\in\Lambda$. (ii) $f\in HBV$，$\sum_{n=1}^{\infty}(\omega(\frac{1}{n})/n\lg n)^{\frac{1}{2}}<\infty$ 含有 $\mathfrak{D}[f]\in\Lambda$. 盛[25]将此结果改进为 $f\in\Lambda BMV$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}(\omega(\frac{1}{n})/n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1})^{\frac{1}{2}}<\infty$ 或 $f\in HBMV$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}(\omega(\frac{1}{n})/n\lg n)^{\frac{1}{2}}<\infty$，同样得到 $\mathfrak{D}[f]\in\Lambda$. 另一方面王[24]又改进了上述[19]中的结果，将条件 $f\in BV\cap\mathrm{Lip}\alpha(\alpha>0)$ 放宽为 $f\in\{n^\beta\}BV\cap\mathrm{Lip}\alpha(\alpha>0,0<\beta<\frac{1}{2})$ 亦得 $\mathscr{D}[f]\in\Lambda$. 盛[26]继续将此条件减轻，证得：$f\in\{n^\beta\}BMV_p\cap\mathrm{Lip}\alpha(\alpha>0,p\geqslant1,0<\beta<1-\frac{p}{2})$ 含有 $\mathfrak{D}[f]\in\Lambda$. 1980 年 Shiba[7] 证明：若 $f\in\Lambda BV_p$，$1\leqslant p<2r$，$1<r<\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{\frac{1}{2r}}(\omega_{p+(2-p)s}(f,\frac{\pi}{n}))^{1-\frac{p}{2r}}(n^{-(1-\frac{1}{2s})})<\infty$，$(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1)$，则 $\mathfrak{D}[f]\in\Lambda$. 这里 $\omega_p(f,\delta)=\sup_{0<t\leqslant\delta}\{\int_I|f(x+t)-f(x)|^pdx\}^{\frac{1}{p}}$. 接着 Schramm[8] 证明：假如 $f\in\Lambda BV_p(1\leqslant p<2r,1\leqslant r<\infty)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}[\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{-1}]^{-\frac{1}{2r}}(\omega_{p+(2-p)s}(f,\frac{\pi}{n}))^{1-\frac{p}{2r}}/n^{\frac{1}{2}}<\infty$，$(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1)$，则 $\mathscr{D}[f]\in\Lambda$. 由于 $n/\lambda_n\leqslant\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{-1}$，所以这个结果含有 Shiba 的定理. 特别地当 $p=1$，$r=1$，$s=\infty$ 时，这就是王[24]的结果. 另一方面 Schramm[8] 还证明，如果 $f\in\varphi\Lambda BV$，φ 满足 Δ_2 性质，且对 $1\leqslant p<2r$，$1\leqslant r<\infty$ 有 $\sum\{\varphi^{-r}[(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{-1})]^{-1}\omega_{p+(2-p)s}^{2r-p}(f;\frac{\pi}{n})^{\frac{1}{2r}}/n^{\frac{1}{2}}<\infty(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1)$，那么 $\mathfrak{D}[f]\in\Lambda$. 盛证得[29]：若 $f\in\varphi\Lambda BMV$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\{\omega(f,\frac{1}{n})/n\varphi^{-1}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{-1}\}^{\frac{1}{2}}<\infty$，则 $\mathfrak{D}[f]\in\Lambda$. 令 $\varphi(x)=x$ 便得上述[8]的结果.

设 $\omega(\delta)$ 为任意的连续模函数(即满足 $\omega(0)=0$，$\omega(\delta)\uparrow$，$\omega(\delta)\in C_{2\pi}$，$\omega(\delta_1+\delta_2)\leqslant\omega(\delta_1)+$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$\omega(\delta_2))$. 若 $f\in C_{2\pi}$ 且 $\omega(\delta,f)=O(\omega(\delta))$, $\delta>0$, 则说 $f\in H^{\omega}$. 1975 年 Chanturia[34] 证明: 若 $f\in H^{\omega}\cap V[n^{\alpha}]$, $0\leqslant\alpha<\frac{1}{2}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[\omega(\frac{1}{n})]^{\frac{1-2\alpha}{2(1-\alpha)}}<\infty$, 则 $\mathfrak{D}[f]\in A$. 1981 年她继续证明[34]: 若 $f\in H^{\omega}\cap V[v]$, $v(n)=o(n^2)$, $v(1)=\omega(1)=1$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}B_n\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sum_{k=\varphi(n)}^{n+\varphi(n)}\frac{v^2(k)}{k^2})^{\frac{1}{2}}<\infty$, 则 $\mathfrak{D}[f]\in A$. (其中 $\varphi(n)=\max\{n:\frac{v(n)}{n}\geqslant\omega(\frac{1}{n})\}$). 从这个定理还可推得以下结果: (i) 若 $f\in H^{\omega}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\omega(\frac{1}{n})<\infty$, 则 $\mathfrak{D}[f]\in A$. 这是 Bernstein 的定理[20, p. 608]. (ii) 设 $f\in H^{\omega}\cap V[n^{\alpha}]$, $0\leqslant\alpha<\frac{1}{2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}[\omega(\frac{1}{n})]^{1-\frac{2\alpha}{2(1-\alpha)}}/n<\infty$, 则 $\mathfrak{D}[f]\in A$. (iii) $f\in H^{\omega}\cap V[\lg^{\beta}(n+1)]$ $(0<\beta<\infty)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\omega^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{n})\lg^{\frac{\beta}{2}}(\frac{1}{\omega(\frac{1}{n})+1})<\infty$ 含有 $\mathfrak{D}[f]\in A$. Chanturia[34] 还进一步指出: 如果 $f\in H^{\omega}\cap V[v]$, 在 $V[v]$ 作适当限制的情形下, 对于其 Fourier 级数的绝对收敛条件"$\sum_{n=1}^{\infty}B_n<\infty$"是必要的. 详细地说: 假如存在 $\varepsilon\in(0,\frac{1}{2})$ 使得 $n^{\varepsilon-\frac{1}{2}}v(n)$ 几乎处处减少, $n^{-\varepsilon}v(n)$ 几乎处处增加, 且 $\omega(\delta)$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}B_n=\infty$, 那么存在函数 $f\in H^{\omega}\cap V[v]$ 使 $\mathfrak{D}[f]$ 发散.

2.5 设 $f\in L_{2\pi}$, 用 $\hat{f}(n)$ 表示 $f(x)$ 的 Fourier 级数的系数. 1979 年 Waterman[5] 证明: $f\in\Lambda BV$, $\Lambda=\{\lambda_n\}$ 含有 $\hat{f}(n)=O(\frac{\lambda_n}{n})$. 王[24]指出: 如果令 $\lambda_n=n$, 则上式中的 $O(\frac{\lambda_n}{n})=O(1)$; 如果令 $\lambda_n=n\lg n$, 则 $O(\frac{\lambda_n}{n})=O(\lg n)$. 这是不能令人满意的. 王[24]改进为: $f\in\Lambda BV$, $(\Lambda=\{\lambda_n\})$ 含有 $\hat{f}(n)=O((\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{-1})^{-1})$. 几年以后 Sablina[13] 亦得到类似结果. 证得: $f\in\Lambda BV$ 含有 $|\hat{f}(n)|\leqslant V_{\Lambda}(f)/\sum_{i=1}^{2|n|}\lambda_i^{-1}$ $(n=\pm1,\pm2,\cdots)$. 如果取 $\lambda_n=n$, 即得 $\hat{f}(n)=O((\lg n)^{-1})$. 盛[26]将条件放宽到 $f\in\Lambda BMV$ 获得相同结果(*). 还进一步证明: $f\in\varphi\Lambda BMV$ 含有 $\hat{f}(n)=O\{\varphi^{-1}[\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{-1}]^{-1}\}$; $f\in\Phi BMV$ 含有 $\hat{f}(n)=O\{\Phi_n^{-1}(c)\}$. (其中 $\Phi_n^{-1}(x)$ 为 $\Phi_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)$ 的反函数, c 为正常数). 如果取 $\varphi_n(x)=\frac{x^p}{\lambda_n}$ $(p\geqslant1)$, 则 $\hat{f}(n)=O\{(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{-1})^{-\frac{1}{p}}\}$. 现在要问这些 Fourier 系数按阶的意义是否精确? Sablin[13] 证得: 设 $\lambda_n\to\infty$, 对某一 $\alpha\in(0,1)$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{[n\alpha]+1}\lambda_k^{-1}/\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1}=\alpha$, 则 $|\hat{f}(n)|\leqslant V_{\Lambda}(f)/\sum_{i=1}^{2|n|}\lambda_i^{-1}$ 按阶的意义不能改进. 王[24]又证明: 设 $\Gamma BV\subset\Lambda BV$, 且 $\Lambda BV\neq\Gamma BV$, 那么存在 $f_0\in\Lambda BV$ 使 $\hat{f}_0(n)\neq O\{(\sum_{k=1}^{n}r_k^{-1})^{-1}\}$. 盛[26]进一步证明: 设 $\Psi BMV\subsetneqq\Phi BMV$, 则存在 $f\in\Phi BMV$ 使 $\hat{f}(n)$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$\neq O\{\Psi_n^{-1}(c)\}$. 其中 $\Psi_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\psi_k(x)$, $\Psi=\{\psi_n(x)\}$. 现在要问如果函数 f 加强为关于上述各类广义有界变差下是连续的，那么其 Fourier 系数的阶能否相应地有所提高呢？回答是肯定的. 即有 $f\in\Lambda BV_c$ 含有 $\hat{f}(n)=o\{(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1})^{-1}\}$ [24]; $f\in\Phi BMV_c$ 含有 $\hat{f}(n)=o\{\Phi_n^{-1}(c)\}$[26]. 特别地如果 $f\in\Phi BV_c$，则从上面的结果亦推得 $\hat{f}(n)=o\{\Phi_n^{-1}(c)\}$. 若取 $\varphi_n(x)=\frac{x}{\lambda_n}$，便得上述(*)的结果. 关于阶的精确性盛又进一步证明[26]：设 $\varphi_n(x)$ 满足(1.1)的条件且对固定的 $x>0$，有 $\varphi_n(x)\to 0$ $(n\to\infty)$ 以及 $\Phi_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\to\infty$ $(n\to\infty)$，则存在 $f_0\in\Phi BV_c$，使对充分慢趋于零的数列 $\{a_n\}$ 和自然数子列 $\{n_k\}$ 有 $\hat{f}_0(n_k)=a_{n_k}\Phi_{n_k}^{-1}(c)$. 置 $\varphi_n(x)=\frac{x}{\lambda_n}$，便得在 $f_0\in\Lambda BV_c$ 的条件下存在充分慢趋于零的数列 a_{n_k} 与自然数子列 n_k 使 $\hat{f}_0(n_k)=a_{n_k}\{(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1})^{-1}\}$

参 考 文 献

[1] D. Waterman, Studia Math, 44(1972), 107—117.

[2] C. Corffman and D. Waterman, J London Mat. Soc., 10(1975), 69—74.

[3] D. Waterman, Studia Math, 55(1976), 97—109.

[4] D. Waterman, Studia Math, 57(1976), 33—45.

[5] D. Waterman, Proc. Amer. Math. Soc., 74(1979), 119—123.

[6] S. Perlman and D. Waterman, Proc. Amer. Math. Soc., 74(1979), 113—118.

[7] S. Shiba, Sci. Rep. Fukushima Univ., 30(1980), 7—10.

[8] M. Schramm and D. Waterman, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar, 40(3—4)(1982), 273—276.

[9] M. Schramm, Tran. Amer. Math. Soc., Vol. 287, 11(1985), 49—63.

[10] J. Ciemnoczolowski and W. Orlicz, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 96, No. 3(1986), 431—436.

[11] M. Avdishahic, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 95, No. 2(1985), 431—436.

[12] D. Waterman, J. Math. Analysis and Appl., 37(1982), 51—54.

[13] A. I. Sablin, Analysis Math., 11(1985), 331—341.

[14] N. Wiener, J Massechusetts Inst. Tech., 3(1924), 73—94.

[15] L. C. Young, Acta Math., 67(1936), 251—282.

[16] A. Bernstein and D. Waterman, Indian Univ J., 22(1972), 569—576.

[17] J. F. Upton, Analysis Math., 11(1983), 241—256.

[18] R. Salan, Aclual. Sci. et Industr., No. B62, Herman paris, 6(1940).

[19] A. Zygmund, Trignometric series, Carbridge, 1959.

[20] N. Bari, Trignometric Series, Mockba, 1961.

[21] X. H. Sun, J. A. T, Vol. 49, No. 3(1987), 289—299.

[22] Marcinkiewicz, Colleeled paper, Polish Scientipic Publishers Warszawz, 1964, 36—41.

[23] Z. Z. Chanturia, Dokl Akad. Nauk SSSR, 214(1974), 63—66.

[24] 王斯雷，中国科学 A 辑，No. 11(1981), 1299—1309.

[25] 施咸亮，中国科学 A 辑，No. 9(1984), 796—805.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

[26] 盛淑云，数学进展，Vol. 19，No. 4(1990)，450—461.
[27] 施咸亮、陈全德，数学杂志，Vol. 9，No. 2(1989)，165—170.
[28] 邵国梁，数学年刊 A 辑，Vol. 6，No. 3(1985)，311—317.
[29] 盛淑云，数学杂志，Vol. 8，No. 1(1988)，75—79.
[30] 盛淑云，河南大学学报(增刊)，88 年全国逼近论文集，134—135.
[31] 陈全德，杭州大学学报，Vol. 7，No. 1(1990)，39—42.
[32] C. Russess and J. F. Upton，Analysis Math.，9(1989)，69—77.
[33] R. Bojanic and D. Waterman，Publ. Inst. (Belgrade) 16，No. 40(1979)，57—60.
[34] Z. Z. Chanturia，Pacific J. Math.，Vol. 96，No. 1(1981)，37—61.
[35] D. Waterman，Real Analysis Exchange，Val，3(1978)，61—83.
[36] P. Vérlesi，Actn. Math. Acad. Sci. Hungar，35(1980)，23—31.
[37] A. A. Kelzon，Izv. Vuzov. Matem.，8(1984)，14—20.
[38] X. H. Sun，Acta Math. Hung.，53(1—2)(1989)，75—84.
[39] R. Bojanic，Publ. Inst. Math(Belgrade)26，No. 40(1979)，57—60.
[40] X. H. Sun，J. Appron. Th. and ito Appl.，2(1986)，27—37.
[41] 王元夔、郭顺生，数学学报，7(1991)，462—469.
[42] R. Aakhan，Acta Math. Acad Scien Hung，35(1980)，193—203.

Some Developments and Applications of Generalized Bounded Variational Functions

Sheng Shuyun Chen Quande Sun Linfa

(Hangzhou University)

Abstract

We survey the developments of generalized bounded variational functions during the period from 1972 to 1991.

Furthermore, we discuss its applications on Fourier analysis and approximations of functions.

Keywords generalized bounded variational functions, Fourier analysis, approximation.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.