第15卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 15 No. 4
1995年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 1995

Curran两个猜想的证明*

班桂宁　　俞曙霞　　班桂林
(广西大学数学系，南宁 530004)

摘　要　本文证明：(1) Curran的两个猜想；(2) p^7阶非循环群是LA群.

关键词　有限p群,LA群,群的阶,群的自同构.
分类号　AMS(1991) 20D15,20D45/CCL O152.1

1989年,M.J.Curran在第二届国际群论会议上提出如下三个猜想[1]：

(i)　不存在群G满足$|A(G)|=|G|=p^6$.

(ii)　当$p\equiv1(\bmod 3)$时,能作为有限群的自同构群的p群的最小阶为p^7.

(iii)　能作为有限群的自同构群的3-群的最小阶为3^9.

本文证明了猜想(i),(ii).文中,p均指奇素数,群均指有限群,并采用[2]的方式书写群的定义关系.记号:$\Phi_{10}(2111)_{b_r}$、$\Phi_{10}(1^5)$、$\Phi_{39}(21^4)_{b_{p+r}}$、$\Phi_{39}(21^4)_{b_r}$的定义见[2].LA-群的定义可见[5]等.至于其它记号与术语除特别注明外都是标准的.

由[3]易知：

引理1　二项同余式

$$x^5\equiv1\ (\bmod p)$$

恰有$(p-1,5)$个解.

由[4,定理4]易证：

引理2　设$p>3$,$G=\Phi_{10}(1^5)$,$\sigma\in A(G)$,$a_i'=\sigma(a_i)(i=1,\cdots,4)$.那么

(i)　$a_4'=a_4^{y^5}$,$a_3'=a_4^{u_1}a_3^{y^4}$,$a_2'=a_4^{u_2}a_3^{v_2}a_2^{y^3}$,$a_1'=a_4^{u_3}a_3^{v_3}a_2^{w_3}a_1^{y^2}$,$a'=a_4^{u_4}a_3^{v_4}a_2^{w_4}a^{y}$,其中

$u_1=w_3y^2+y^3(y^2-y-x_4)$,

$u_2=v_3y+w_3y(y-1)/2+w_4y^2-w_3x_4+y^3(y-1)(y-2)/6-y^3(y^2-1)/2$,

$v_2=w_3y+y^3(y-1)/2$, $(p,y)=1$.

(ii)　$|A(G)|=(p-1)p^7$.

定理　(i)　p^7阶非循环群为LA群.

(ii)　设$1\leqslant n\leqslant6$.如果$|A(G)|=p^n$,则$n=6$,$p\equiv2(\bmod 3)$,且$G=\Phi_{10}(2111)_{b_0}$.

(iii)　如果$p\equiv2(\bmod 3)$,则$|A(\Phi_{10}(2111)_{b_0})|=p^6$.

(iv)　$A(\Phi_{39}(21^4)_{b_{p+r}})=(p-1,5)p^7$.

* 1992年10月19日收到.94年4月16日收到修改稿.

(v) $|A(\Phi_{39}(21^4)_{b_r})|=p^7$.

证明 由[5,推论]、[6,定理]、[7,Theorem]及[8,19.1 Satz]知:论断(i)成立.

由[5,定理 3]、[6,定理]、[9]及[10]知:论断(ii)成立.

由[4,系理]知:论断(iii)成立.

因此,我们仅需证明论断(iv)和论断(v):

设群 G 为 $\Phi_{39}(21^4)_{b_{p+r}}$ 或 $\Phi(21^4)_{b_r}$. 那么可设 $G=\langle a,a_1,\cdots,a_5 \mid [a_i,a]=a_{i+1},[a_1,a_2]=a_4,[a_2,a_3]=[a_3,a_1]=[a_4,a_1]=a_5,a^p=a_5^s,a_1^p=a_5^{s_1},a_{i+1}^p=a_5^p=1(i=1,2,3)$,$s=0$ 或 r,$s_1=r$ 或 K (K 的意义见[2]).

设 $\sigma\in A(G)$,$a_i'=\sigma(a_i)(i=1,\cdots,5)$,$a'=\sigma(a)$. 由引理 2,我们得出如下结论(简称为结论(*)):

$a_5'=a_5^{t_0}$,$a_4'=a_5^{t}a_4^{y^5}$,$a_3'=a_5^{t_1}a_4^{u_1}a_3^{y^4}$,$a_2'=a_5^{t_2}a_4^{u_2}a_3^{v_2}a_2^{y^3}$,$a_1'=a_5^{t_3}a_4^{u_3}a_3^{v_3}a_2^{w_3}a_1^{y^2}$,$a'=a_5^{t_4}a_4^{u_4}a_3^{v_4}a_2^{w_4}a^{y}$ (因为 $[a_4',a']=1$),其中

$$u_1\equiv w_3y^2+y^4(y-1),$$

$$u_2\equiv v_3y+w_3y(y-1)/2+w_4y^2+y^3(y-1)(y-2)/6-y^3(y^2-1)/2,$$

$$v_2\equiv w_3y+y^3(y-1)/2,\ (p,yt_0)=1.$$

容易验证 $a_5'=[a_4',a_1']$ 等价于 $t_0\equiv y^7(\mathrm{mod}\,p)$;$[a_3',a']=a_4'$ 等价于 $t+y^4w_4\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$;$a_1'^p=a_5'^{s_1}$ 等价于 $y^5\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$;$[a_1',a_2']=a_4'$ 等价于 $v_3\equiv(w_3^2y^3-w_3+5y^2(y^2-1)/6)/2(\mathrm{mod}\,p)$(注:1/2 代替 $2R\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$ 中的 R).

因为 σ 由 a_1',a' 唯一确定,所以 $|A(G)|\leqslant(p-1,5)p^7$. 对于 $\Phi_{39}(21^4)_{b_{p+r}}$,令 $a'=a_5^{t_4}a_4^{u_4}a_3^{v_4}a_2^{w_4}a^{y}$,$a_1'=a_5^{t_3}a_4^{u_3}a_3^{v_3}a_2^{w_3}a_1^{y^2}$,$a_{i+1}'=[a_i',a'](i=1,2,3)$,$a_5'=[a_4',a_1']$,其中

$$v_3=(w_3^2y^3-w_3+5y^2(y^2-1)/6)/2,\ y^5\equiv 1(\mathrm{mod}\,p),\ 1\leqslant y<p.$$

由引理 2 知此时结论(*)仍然成立,由此容易验证 $a_i',a'(i=1,\cdots,5)$ 不但生成 $\Phi_{39}(21^4)_{b_{p+r}}$ 而且满足其定义关系,由[4,引理 1(Van Dyck)]知:$|A(\Phi_{39}(21^4)_{b_{p+r}})|=(p-1,5)p^7$. 下设 $G=\Phi_{39}(21^4)_{b_r}$. 由于 $a'^p=a_5'^r$ 等价于 $y\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$,故 $|A(G)|\leqslant p^7$. 但由[6,定理 9.5]知:$|A(G)|\geqslant p^7$. 所以 $|A(G)|=p^7$. 证毕.

参 考 文 献

[1] M. J. Curran, *A note on p-groups that are automorphism groups*, B. Pettineo and P. Vetro-Supplemento ai rendiconti del circolo matemtico di palermo (Proceedings of the Second International Group Theory Conference Bressanone/Bixen, June 11—17, 1989). Serie Ⅱ-number 023-anno 1990, Palermo Sede Della Societa via archirafi, 34: 57—62.

[2] R. Jams, *The groups of order p^6 (p an odd prime)*, Math. Comp. 34(150): 613—637, 1980.

[3] 柯召、孙琦, 数论讲义(上), 高等教育出版社, 1988: 157—158.

[4] 班桂宁、俞曙霞, 一类 p 群的自同构群的阶, 数学学报, 35(4): 570—574, 1992.

[5] 俞曙霞、班桂宁, 若干 LA 群及有关定理, 广西大学学报(自然科学版), 18(1): 6—12, 1993.

[6] 俞曙霞、班桂宁, 关于 LA 群的一个定理, 广西大学学报(自然科学版), 19(1): 1—8, 1994.

[7] R. M. Davitt, *On the automorphism group of a finite p-group with a small central quotient*, Can. J. Math., 32(5): 1168—1176, 1980.

[8] B. Hupper, *Endliche Gruppen* I, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979: 403—404.

[9] M. J. Curran, *Automorphisms of certain p-groups (p odd)*, Bull. Austral. Math. Soc., 38: 299—305, 1988.

[10] D. Machale, *Some finite groups which are rarely automorphism groups* I, Proc. R. Ir. Acad., 83A(2): 189—196, 1983.

The Proof of Two Conjectures of Curran

Ban Guining Yu Shuxia Ban Guilin

(Dept. of Math., Guangxi Univ., Nanning 530004)

Abstract

We confirm two conjectures of Curran, and show that the noncyclic groups of order p^7 are LA-groups.

Keywords group, finite group, p-group, automorphism, defining relation.