第15卷第4期　数学研究与评论　Vol. 15 No. 4
1995年11月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Nov. 1995

关于Bernstein多项式的线性组合*

谢林森
(丽水师范专科学校数学系，浙江323000)

摘　要　本文对于一类函数建立了Bernstein多项式线性组合的点态逼近定理.

关键词　Bernstein多项式，点态逼近，连续模.
分类号　AMS(1991) 41A36/CCL O174.41

§1 引　言

对于$f\in C[0,1]$，考虑Bernstein多项式

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\triangleq\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})p_{n,k}(x)$$

的一种线性组合$B_n(f,r-1,x)=\sum_{i=0}^{r-1}c_i(n)B_{n_i}(f,x)$，其中$n_i$和$c_i(n)$满足

(a)　$n=n_0<n_1<\cdots<n_{r-1}\leqslant kn$；　(b)　$\sum_{i=0}^{r-1}|c_i(n)|\leqslant C$；

(c)　$\sum_{i=0}^{r-1}c_i(n)n_i^{-\rho}=0,\ \rho=1,2,\cdots,r-1$；　(d)　$\sum_{i=0}^{r-1}c_i(n)=1$.

这里k,C是与n无关的常数，下同，只是在不同的地方取值可能不同.

最近，周定轩[1]证得

定理Z　设$f\in C[0,1]$，$r\in N$且$r\geqslant 2$，那么

$$B_n(f,r-1,x)-f(x)=O(\omega_r(f,\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}+\frac{1}{n^2}})).$$

若$0<\alpha<r$，则

$$B_n(f,r-1,x)-f(x)=O((\frac{x(1-x)}{n}+\frac{1}{n^2})^{\alpha/2}),\quad x\in[0,1]$$

的充要条件是$\omega_r(f,t)=O(t^\alpha)$，其中

$$\omega_r(f,t)=\sup_{0<\eta\leqslant t}\ \sup_{\frac{r\eta}{2}\leqslant x\leqslant 1-\frac{r\eta}{2}}|\Delta_\eta^r f(x)|,$$

* 1992年4月14日收到.

$$\Delta_\eta^r f(x)=\begin{cases}\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^k f(x+(\frac{r}{2}-k)\eta), & \frac{r\eta}{2}\leqslant x\leqslant 1-\frac{r\eta}{2},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

设 S_r 是由满足如下条件的函数 ψ 的全体组成：

$\psi(t)>0(0<t\leqslant 1)$是单调增加函数，且对某一 $k>1$，$t^{r-\frac{1}{k}}\int_t^1 \frac{\psi(\eta)}{\eta^{r+1-\frac{1}{k}}}d\eta=O(\psi(t))$.

本文将定理 Z 改进为

定理 1　设 $\psi\in S_r$，$r\in N$ 且 $r\geqslant 2$，则对于 $f\in C[0,1]$，

$$B_n(f,r-1,x)-f(x)=O(\psi(\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}+\frac{1}{n^2}})),\quad x\in[0,1]$$

的充要条件是 $\omega_r(f,t)=O(\psi(t))$.

由于 $B_n(f,r-1,0)=f(0)$和 $B_n(f,r-1,1)=f(1)$，因此，在区间$[0,1]$的端点附近应有更好的估计，结果是如下的

定理 2　设 $f\in C[0,1]$，$r\in N$ 且 $r\geqslant 2$，那么

$$B_n(f,r-1,x)-f(x)=O(\omega_r(f,\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}+\frac{1}{n^2}(nx(1-x))^{2/r}})),\quad x\in[0,1].$$

注记　在 $r\geqslant 2$ 时，定理 2 中关于端点的估计是不能改进的. 事实上，取 $f(x)=x^r$，则对于任意的 $\varepsilon_n\in C[0,1]$且 $\varepsilon_n(0)=\varepsilon_n(1)=0$，容易验证

$$\sup_{x\in(0,1)}\left|\frac{B_n(f,r-1,x)-f(x)}{\omega_r(f,\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}+\frac{\varepsilon_n(x)}{n^2}(nx(1-x))^{2/r}})}\right|=\infty.$$

§2　定理的证明

记 $K_r(f,t)=\inf_g\{\|f-g\|+t\|g^{(r)}\|_\infty;g^{(r-1)}\in A.C._{loc}\}$，这里 $\|g^{(r)}\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|g^{(r)}(x)|$. 周知[2]，对于 $f\in C[0,1]$，存在着常数 $C>0$，使得 $C^{-1}\omega_r(f,t)\leqslant K_r(f,t^r)\leqslant C\omega_r(f,t)$.

我们需要如下引理：

引理 1[3]　设 $u_1(x)$，$u_2(x)$是非负的单调增加函数，$r>0$，$C>0$，若对于任意 $0<t,h\leqslant 1$，

$$u_1(h)\leqslant C\{u_2(t)+(\frac{h}{t})^r u_1(t)\},$$

则 $u_1(t)\leqslant At^{r-\frac{1}{k}}\int_t^1\frac{u_2(\eta)}{\eta^{r+1-\frac{1}{k}}}d\eta$，这里 $k>1$，A 是依赖于 $C,k,u_1(1),u_2(1)$的常数.

引理 2　设 $r\in N$，$\varphi(x)=(x(1-x))^{1/2}$，则

(i)　$\|B_n^{(r)}(f)\|\leqslant 2^r n^r\|f\|$，$f\in C[0,1]$；

(ii)　$\|\varphi^r B_n^{(r)}(f)\|\leqslant M_1 n^{r/2}\|f\|$，$f\in C[0,1]$；

(iii)　$\|B_n^{(r)}(f)\|\leqslant M_2\|f^{(r)}\|_\infty$，$f^{(r-1)}\in A.C._{loc}$；

(iv) 对于 $0<t<\frac{1}{8r}$ 和 $\frac{rt}{2}\leqslant x\leqslant 1-\frac{rt}{2}$，

$$\int_{-t/2}^{t/2}\cdots\int_{-t/2}^{t/2}\varphi^{-r}(x+\sum_{k=1}^{r}u_k)du_1\cdots du_r\leqslant M_3t^r(\max_{-r\leqslant k\leqslant r}\{\varphi(x+kt/2)\})^{-r},$$

这里 $M_i(i=1,2,3)$ 是常数.

证明 记 $\vec{\Delta}_t^r f(x)=\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}f(x+(r-k)t)$. 根据[2]

$$B_n^{(r)}(f,x)=\frac{n!}{(n-r)!}\sum_{k=0}^{n-r}\vec{\Delta}_{1/n}^r f(\frac{k}{n})p_{n-r,k}(x),$$

(i)和(iii)即可证得.

(ii) 设 $f\in C[0,1]$，当 $\varphi(x)\leqslant n^{-1/2}$ 时，根据(i)，有

$$|\varphi^r(x)B_n^{(r)}(f,x)|\leqslant n^{-r/2}\|B_n^{(r)}(f)\|\leqslant 2^r n^{r/2}\|f\|.$$

当 $\varphi(x)>n^{-1/2}$ 时，由于[2] $p_{n,k}^{(r)}(x)=\sum_{\substack{l\geqslant 0,m\geqslant 0\\ 2l+m\leqslant r}}q_{l,m}(x)(k-nx)^{r-2l-m}(x(1-x))^{l-r}n^l p_{n,k}(x)$ 其中 $q_{l,m}(x)$ 是与 n,k 无关的多项式，以及[2] $B_n((\cdot-x)^{2s},x)=\sum_{i=0}^{s-1}\frac{\varphi^{2s-2i}(x)}{n^{s+i}}a_{s,i}(x)$，其中 $a_{s,i}(x),i=0,1,\cdots,s-1$ 是与 n 无关的多项式，有

$$\begin{aligned}|\varphi^r(x)B_n^{(r)}(f,x)|&\leqslant|\varphi^r(x)\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})p_{n,k}^{(r)}(x)|\\&\leqslant\varphi^r(x)\sum_{\substack{l\geqslant 0,m\geqslant 0\\ 2l+m\leqslant r}}\|f\|\cdot\|q_{l,m}\|\cdot n^l(x(1-x))^{l-r}\sum_{k=0}^{r}|k-nx|^{r-2l-m}p_{n,k}(x)\\&\leqslant C\|f\|\sum_{\substack{l\geqslant 0,m\geqslant 0\\ 2l+m\leqslant r}}n^l(x(1-x))^{l-r/2}n^{r-2l-m}(B_n((\cdot-x)^{2r-4l-2m},x))^{1/2}\\&\leqslant Cn^{r/2}\|f\|.\end{aligned}$$

(iv) 对于 $0<t<\frac{1}{8r}$，只证明 $\frac{rt}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 的情形，对于 $\frac{1}{2}<x\leqslant 1-\frac{rt}{2}$ 的情形类似可证.

当 $(r+1)t/2\leqslant x\leqslant 1/2$ 时，有

$$\begin{aligned}\int_{-t/2}^{t/2}\cdots\int_{-t/2}^{t/2}\varphi^{-r}(x+\sum_{k=1}^{r}u_k)du_1\cdots du_r&\leqslant(\frac{1}{2}-\frac{rt}{2})^{-r/2}(x-\frac{rt}{2})^{-r/2}t^r\\&\leqslant 2^r(r+1)^r t^r x^{-r/2}\leqslant 4^r(r+1)^{2r}t^r(\max_{-r\leqslant k\leqslant r}\{\varphi(x+kt/2)\})^{-r};\end{aligned}$$

当 $rt/2<x<(r+1)t/2$ 和 $r=2m,m\in N$ 时，根据 M. Becker[4]的结果，有

$$\begin{aligned}&\int_{-t/2}^{t/2}\cdots\int_{-t/2}^{t/2}\varphi^{-r}(x+\sum_{k=1}^{r}u_k)du_1\cdots du_r\\&\leqslant\prod_{j=1}^{m}\int_{-t/2}^{t/2}\cdots\int_{-t/2}^{t/2}\varphi^{-2}(x-(r-2)t/2+u_{2j-1}+u_{2j})du_{2j-1}du_{2j}\\&\leqslant(6t^2\varphi^{-2}(x-rt/2+2t))^m\leqslant(2r)^{r/2}6^{r/2}t^r\varphi^{-r}(x+rt/2)\\&\leqslant(12r)^{r/2}t^r(\max_{-r\leqslant k\leqslant r}\{\varphi(x+kt/2)\})^{-r};\end{aligned}$$

当 $rt/2<x<(r+1)t/2$ 和 $r=2m-1,m\in N$，同理有

$$\int_{-t/2}^{t/2}\cdots\int_{-t/2}^{t/2}\varphi^{-r}(x+\sum_{k=1}^{r}u_k)du_1\cdots du_r$$

$$\leqslant\int_{-t/2}^{t/2}\varphi^{-r}(x-(r-1)t/2+u_r)du_r\prod_{j=1}^{m-1}\int_{-t/2}^{t/2}\int_{-t/2}^{t/2}\varphi^{-2}(x-(r-2)t/2$$

$$+u_{2j-1}+u_{2j})du_{2j-1}du_{2j}\leqslant 4r(12r)^{r/2}t^r(\max_{-r\leqslant k\leqslant r}\{\varphi(x+kt/2)\})^{-r}.$$

引理 3 设 $r\in N$ 且 $r\geqslant 2$，则 $B_n(|\cdot-x|^r,x)=O((\frac{x(1-x)}{n}+\frac{1}{n^2}(nx(1-x))^{2/r})^{r/2})$.

证明 由于

$$B_n((\cdot-x)^{2s},x)\leqslant C((\frac{x(1-x)}{n})^s+\frac{nx(1-x)}{n^{2s}}),$$

故当 $nx(1-x)\leqslant 1$ 时，$B_n((\cdot-x)^{2s},x)\leqslant C\frac{nx(1-x)}{n^{2s}}$；当 $nx(1-x)>1$ 时，$B_n((\cdot-x)^{2s},x)$ $\leqslant C(\frac{x(1-x)}{n})^s$. 所以，当 $nx(1-x)\leqslant 1$ 时，

$$B_n(|\cdot-x|^r,x)\leqslant(B_n((\cdot-x)^{2(r-1)},x))^{1/2}(B_n((\cdot-x)^2,x))^{1/2}$$

$$\leqslant C(\frac{nx(1-x)}{n^{2(r-1)}}\cdot\frac{nx(1-x)}{n^2})^{1/2}\leqslant C\frac{nx(1-x)}{n^r}$$

$$\leqslant C(\frac{(nx(1-x))^{2/r}}{n^2})^{r/2};$$

当 $nx(1-x)>1$ 时，

$$B_n(|\cdot-x|^r,x)\leqslant C((\frac{x(1-x)}{n})^{r-1}(\frac{x(1-x)}{n}))^{1/2}\leqslant C(\frac{x(1-x)}{n})^{r/2},$$

从而，$B_n(|\cdot-x|_r,x)\leqslant C(\frac{x(1-x)}{n}+\frac{(nx(1-x))^{2/r}}{n^2})^{r/2}$. 证毕.

定理 2 的证明 设 $g^{(r-1)}\in A.C._{loc}$，由 Taylor 公式，有

$$g(t)=g(x)+\sum_{i=1}^{r-1}\frac{g^{(i)}(x)}{i!}(t-x)^i+\int_x^t\frac{g^{(r)}(u)}{(r-1)!}(t-u)^{r-1}du,$$

因而，由引理 3，对于 $x\in[0,1]$，

$$|B_n(g,r-1,x)-g(x)|=|B_n(\int_x^t\frac{g^{(r)}(u)}{(r-1)!}(t-u)^{r-1}du,r-1,x)|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{r-1}|c_i(n)|B_{n_i}(\frac{|t-x|^r}{r!},x)\|g^{(r)}\|_\infty$$

$$\leqslant C\|g^{(r)}\|_\infty(\frac{x(1-x)}{n}+\frac{(nx(1-x))^{2/r}}{n^2})^{r/2},$$

于是，对于 $f\in C[0,1]$，$x\in[0,1]$，有

$$|B_n(f,r-1,x)-f(x)|\leqslant|B_n(f-g,r-1,x)|+|f(x)-g(x)|$$

$$+|B_n(g,r-1,x)-g(x)|$$

$$\leqslant C(\|f-g\|+(\frac{x(1-x)}{n}+\frac{(nx(1-x))^{2/r}}{n^2})^{r/2}\|g^{(r)}\|_\infty).$$

所以

$$|B_n(f,r-1,x)-f(x)|\leqslant CK_r(f,(\frac{x(1-x)}{n}+\frac{1}{n^2}(nx(1-x))^{2/r})^{r/2})$$
$$\leqslant C\omega_r(f,\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}+\frac{1}{n^2}(nx(1-x))^{2/r}}),$$

定理1的证明 充分性只要注意到
$$\frac{x(1-x)}{n}+\frac{1}{n^2}(nx(1-x))^{2/r}\leqslant 2(\frac{x(1-x)}{n}+\frac{1}{n^2}),$$
由定理2立即可得,从而只需证明必要性.对于 $d>0$,可选取 $g_d\in C[0,1]$,使得 $g_d^{(r-1)}\in A.C._{loc}$,以及 $\|f-g_d\|\leqslant 2C\omega_r(f,d)$ 和 $\|g^{(r)}\|_\infty\leqslant 2Cd^{-r}\omega_r(f,d)$.

对于 $h\in(0,\frac{1}{8r})$, $t\in(0,h]$, $\frac{rt}{2}\leqslant x\leqslant 1-\frac{rt}{2}$ 和 $n\in N$,定义 $\delta(n,x,t)=\max\{\frac{1}{n},\frac{\varphi(x)}{\sqrt{n}},\cdots,\frac{\varphi(x\pm rt/2)}{\sqrt{n}}\}$,根据引理2,有

$$\begin{aligned}
&|\Delta_t^r f(x)|\\
&\leqslant|\Delta_t^r(f-B_n(f,r-1,\cdot))(x)|+|\Delta_t^r(B_n(g_d,r-1,\cdot))(x)|\\
&\quad+|\Delta_t^r(B_n(f-g_d,r-1,\cdot))(x)|\\
&\leqslant C\psi(\delta(n,x,t))+\int_{-t/2}^{t/2}\cdots\int_{-t/2}^{t/2}|B_n^{(r)}(g_d,r-1,x+\sum_{k=1}^r u_k)|du_1\cdots du_r\\
&\quad+\int_{-t/2}^{t/2}\cdots\int_{-t/2}^{t/2}|B_n^{(r)}(f-g_d,r-1,x+\sum_{k=1}^r u_k)|du_1\cdots du_r\\
&\leqslant C(\psi(\delta(n,x,t))+t^r\|g_d^{(r)}\|_\infty\\
&\quad+\|f-g_d\|\int_{-t/2}^{t/2}\cdots\int_{-t/2}^{t/2}\min\{n^r,n^{r/2}\varphi^{-r}(x+\sum_{k=1}^r u_k)\}du_1\cdots du_r)\\
&\leqslant C(\psi(\delta(n,x,t))+t^r\|g_d^{(r)}\|_\infty\\
&\quad+\|f-g_d\|\min\{nt^r,n^{r/2}\int_{-t/2}^{t/2}\cdots\int_{-t/2}^{t/2}\varphi^{-r}(x+\sum_{k=1}^r u_k)du_1\cdots du_r\})\\
&\leqslant C(\psi(\delta(n,x,t))+t^r d^{-r}\omega_r(f,d)\\
&\quad+t^r\omega_r(f,d)\min\{n^r,(\max_{-r\leqslant k\leqslant r}\{\varphi(x+kt/2)/\sqrt{n}\})^{-r}\})\\
&\leqslant C(\psi(\delta(n,x,t))+t^r d^{-r}\omega_r(f,d)+t^r\omega_r(f,d)(\delta(n,x,t))^{-r}).
\end{aligned}$$

取 $d=\delta(n,x,t)$,则
$$|\Delta_t^r f(x)|\leqslant C(\psi(\delta(n,x,t))+t^r(\delta(n,x,t))^{-r}\omega_r(f,\delta(n,x,t))).$$
注意到 $1<\delta(n,x,t)/\delta(n+1,x,t)\leqslant 2$, $n\in N$,从而对于任意的 $\delta\in(0,\frac{1}{8r})$,可选取 $n\in N$,使得
$$\delta(n,x,t)\leqslant\delta<\delta(n-1,x,t)\leqslant 2\delta(n,x,t).$$
这样,对于 $0<t\leqslant h<\frac{1}{8r}$,有 $|\Delta_t^r f(x)|\leqslant C(\psi(\delta)+(\frac{h}{\delta})^r\omega_r(f,\delta))$,那么,
$$\omega_r(f,h)\leqslant C(\psi(\delta)+(\frac{h}{\delta})^r\omega_r(f,\delta)).$$
由引理1,有 $\omega_r(f,\delta)\leqslant C\delta^{r-\frac{1}{k}}\int_\delta^1\frac{\psi(\eta)}{\eta^{r+1-\frac{1}{k}}}d\eta\leqslant C\psi(\delta)$. 证毕.

作者谨向导师谢庭藩教授的悉心指导并仔细审阅和修改原稿表示感谢.

参 考 文 献

[1] Zhou Dingxuan, *On smoothness characterized by Bernstein type operators*, Submitted to J. Approx. Theory.

[2] Z. Ditzian and V. Totik, *Moduli of Smoothness*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[3] 周信龙,关于 Bernstein 多项式,数学学报,28(1985),848—855.

[4] M. Becker, *An elementary proof of the inverse theorem for Bernstein polynomials*, Acquations Math., 19(1979),145—150.

On the Linear Combination of Bernstein Polynomials

Xie Linsen

(Dept. of Math., Lishui Teachers College, Zhejiang 323000)

Abstract

We establish pointwise approximation theorems for the linear combinations of Bernstein polynomials on a class of functions.

Keywords Bernstein polynomials, linear combination, moduli of smoothness.