第15卷第4期 数学研究与评论 Vol.15 No.4
1995年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov.1995

$6p$ 阶可解对称图的分类*

王汝楫
(首都师范大学数学系，北京100037)

摘要 设 X 是简单无向图，G 是 $\mathrm{Aut}(X)$ 的一个子群. X 称为 G-对称的，如果 G 在 X 的 1-弧(即两相邻顶点构成的有序偶)集合上的作用是传递的；X 称为对称图，如果 X 是 $\mathrm{Aut}(X)$-对称的；X 称为可解对称的，如果 $\mathrm{Aut}(X)$ 包含可解子群 G，使 X 是 G-对称的. 本文给出了具有 $6p$ 个顶点的可解对称图的一个分类，这里 $p\geqslant 5$ 是素数.

关键词 图，群，可解群，置换群，非本原作用.
分类号 AMS(1991) 05C25,20B25/CCL O157.5

§1 引言

设 X 是简单无向图，G 是 X 的全自同构群 $\mathrm{Aut}(X)$ 的一个子群. X 称为 G-对称的，如果 G 在 X 的 1-孤(即两相邻顶点构成的有序偶)集合上的作用是传递的；X 称为对称图，如果 X 是 $\mathrm{Aut}(X)$-对称的. 图的顶点个数称为图的阶. 对于素数 p，阶为 $p,2p,3p\ (p>3),kp\ (k$ 也是素数且 $5\leqslant k<p$)对称图的分类工作已经完成(见[1],[2],[10],[7]和[8]). 本文将考察 $6p\ (p\geqslant 5)$阶对称图的分类. 对于顶点本原的 $6p$ 阶对称图，用[5]的结果可以得到这些图的分类. 对于非本原图(即 X 是 G-对称的且 G 非本原地作用于 X 的顶点集合)，它的块图将是 $2,3,6,p,2p$ 或 $3p$ 阶对称图，依 $2p$ 和 $3p$ 阶对称图的分类，需要分析太多的情况，有些情况是相当复杂的. 因此，本文只限于完成所谓 $6p$ 阶"可解"对称图的分类. 即使如此，限于篇幅，我们不得不略去一些证明的细节.

定义 1.1 称 X 是可解对称图，如果 $\mathrm{Aut}(X)$ 存在可解子群 G，使 X 是 G-对称的，这时还称 X 是 G-可解对称的.

例如，完全图 K_p(p 是素数)是可解对称图，这因为 $\mathrm{Aut}(K_p)\cong S_p$ 包含可解子群 $Z_p\rtimes Z_{p-1}\leqslant \mathrm{AGL}(1,p)$对称地作用于 K_p. 这里，$X\rtimes Y$ 表示半直积.

本文采用的群论和图论的术语和符号一般都是标准的，读者可参看[4]和[3]. 用 $V(X)$和 $E(X)$分别表示图 X 的顶点集合和边集合. 顶点 u 和 v 相邻记为 $u\sim v$ 或 $(u,v)\in E(X)$，也用 (u,v)表示 u 与 v 之间的边. $X_1(v)=\{u\in V(X)\,|\,u\sim v\}$称为顶点 v 的邻域. 对于 $B\subseteq V(X)$，记 $X_1^B(v)=X_1(v)\cap B$. 这样，X 是 G-对称的当且仅当 G 在 $V(X)$上是传递的，而对每个 $v\in V(X)$，稳定子群 G_v 在 $X_1(v)$上传递. 用 kX 表示 k 个与 X 同构的顶点不交的子图的并. 给定

* 1992年10月12日收到. 国家自然科学基金资助课题.

两个图 X_1 和 X_2，用 $X_1[X_2]$表示字典式积，它的顶点集合是 $V(X_1)\times V(X_2)$，而$(x,y)\sim(x',y')$当且仅当 $x\sim x'$或 $x=x'$时有 $y\sim y'$. 显然，当 X_1 为对称图时，$X_1[kK_1]$也是对称图. 如果 $V(X_2)=\{y_1,\cdots,y_d\}$，则对 $1\leqslant i\leqslant d$，$X_1[X_2]$的顶点子集$\{(x,y_i)\mid x\in V(X_1)\}$导出的子图与 X_1 同构. 于是 dX_1 可以嵌入 $X_1[X_2]$. 从 $X_1[X_2]$中删去所嵌入的 dX_1 的边，记所得图为 $X_1[X_2]-dX_1$，称为删除过的字典式积.

设 X 是 G-对称图且 G 非本原地作用于 $V(X)$，令 $\overline{X}=\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$是 G 的完全块系，其中 B_i 是 G 的非平凡的非本原集(简称块，若$|B_i|=b$，还称 B_i 是 b-块). 定义 X 的块图仍记为 $\overline{X}$：$V(\overline{X})=\overline{X}$，$E(\overline{X})=\{(B_i,B_j)\mid$存在 $u\in B_i,v\in B_j$，使$(u,v)\in E(X)\}$. G 在 $\overline{X}$ 上诱导了一个作用，记其核为 K，即 K 是 G 中以集合方式不变每个 B_i 的所有元的集合，于是 $\overline{G}=G/K$ 真实地作用于 $\overline{X}$. 若 X 是连通的 G-(可解)对称图，则块图 $\overline{X}$ 是连通的 $\overline{G}$-(可解)对称图，且 B_i 在 X 中导出了空图(见[6]). 这时，若$(B_i,B_j)\in E(\overline{X})$，则 $B_i\cup B_j$ 在 X 中导出了一个二部图，记为 $X(B_i,B_j)$.

引理 1.2 设 X 是连通的 $6p$ 阶 G-可解对称图，则 G 非本原地作用于 $V(X)$且下列情况之一成立：

(1) $X\cong\overline{X}[2K_1]$，其中 $\overline{X}$ 为 $3p$ 阶 $\overline{G}$-可解对称图； (2) G 在 $V(X)$上有 3-块； (3) G 在 $V(X)$上有 p-块.

证明 G 是可解群，则存在素数 q，使 $O_q(G)\neq 1$. 由 G 在 $V(X)$上传递知，$O_q(G)$的轨道是 G 的块，长为 q 的幂并且整除 $6p$. 于是，块长为 2,3 或 p. 当块长为 2 时，相应的块图 $\overline{X}$ 是 $3p$ 阶 $\overline{G}$-可解对称的，而 $X\cong\overline{X}[2K_1]$或 K 在每个块上的作用是真实的(见[10]的引理 3.3). 对于后者，有 $K\cong 1$ 或 Z_2，总之，有 $K\leqslant Z(G)$. $\overline{G}$ 可解，故存在素数 r，使 $O_r(\overline{G})\neq 1$，记 $H/K=O_r(\overline{G})$. 注意到$|V(\overline{X})|=3p$，知 $r=3$ 或 p. 于是，H 必为 $2^m r^n$ 阶幂零群($m\geqslant 0,n\geqslant 1$). 不难知，$H$ 的 Sylow r-子群 $R\trianglelefteq G$，故 G 有 3-块或 p-块. 证毕.

根据 $3p$ 阶对称图的分类，上述(1)中的 $\overline{X}[2K_1]$为已知图. 在§3 和§4 中，分别对(2)和(3)的情况，给出 $6p$ 阶可解对称图的分类.

§2 6p 阶可解对称图的例

令 $Z_p=\{0,1,\cdots,p-1\}$，$Z_p^*=Z_p\setminus\{0\}$分别是整数模素数 p 的加法群和乘法群，则 $Z_p^*\cong Z_{p-1}$. 令 $r\mid p-1$，本文总记 H_r 是 Z_p^* 中的唯一的 r 阶子群，则 $H_r\cong Z_r$. 在例 2.1 和引理 2.2，先回忆 p，$2p$ 和 $3p$ 阶对称图的一些结果(见[1]，[2]和[10]).

例 2.1 对于 $p-1$ 的每个偶因子 r，定义 p 阶图 $G(p,r)$：$V(G(p,r))=Z_p$，$E(G(p,r))=\{(x,y)\mid x,y\in Z_p,y-x\in H_r\}$；对于 $p-1$ 的每个因子 r，定义 $2p$ 阶图 $G(2p,r)$：$V(G(2p,r))=\{(i,x)\mid i\in Z_2,x\in Z_p\}$，$E(G(2p,r))=\{((0,x),(1,y))\mid x,y\in Z_p,y-x\in H_r\}$；对于 $p-1$ 的每个因子 r，定义 $3p$ 图 $G(3p,r)$：$V(G(3p,r))=\{(i,x)\mid i\in Z_3,x\in Z_p\}$，$E(G(3p,r))=\{((i,x),(i+1,y))\mid i\in Z_3,x,y\in Z_p,y-x\in H_r\}$. 那么，除 $G(2p,1)=pK_2$，其它都是连通的对称图，且有下面的

引理 2.2 设 X 是连通的可解对称图，那么，若 X 是 p 阶的，则 $X\cong G(p,r)$；若 X 是 $2p$

阶的，则 $X\cong K_{p,p}$，$G(p,r)[2K_1]$或 $G(2p,r)(r>1)$；若 X 是 $3p$ 阶的，则 $X\cong K_{p,p,p}$，$G(p,r)[3K_1]$或 $G(3p,r)$.

例 2.3 不连通的 $6p$ 阶可解对称图有 $6pK_1,3pK_2,2pK_3,pK_{3,3},p(K_3[2K_1]),pC_6,6G(p,r),3K_{p,p},3(G(p,r)[2K_1]),3G(2p,r)(r>1),2K_{p,p,p},2(G(p,r)[3K_1]),2G(3p,r)$.

例 2.4 $B(6p,r)$. 先定义图 $B_n(6p,r)(n=1,2,3,4)$如下：

$$n=1\text{ 时，令 } r \text{ 是奇数}, 3r\mid p-1, t\in Z_p^*, \text{使 } H_{6r}=\langle t\rangle,$$
$$n=2\text{ 时，令 } r \text{ 是偶数}, 3r\mid p-1, t\in Z_p^*, \text{使 } H_{3r}=\langle t\rangle,$$
$$n=3\text{ 时，令 } r \text{ 是奇数}, r\mid p-1, t\in Z_p^*, \text{使 } H_{2r}=\langle t\rangle,$$
$$n=4\text{ 时，令 } r \text{ 是偶数}, r\mid p-1, t\in Z_p^*, \text{使 } H_{r}=\langle t\rangle,$$

而

$$V(B_n(6p,r))=\{(i,x)\mid i\in Z_6, x\in Z_p\},$$
$$E(B_n(6p,r))=\{((i,x),(i+1,y))\mid i\in Z_6, x,y\in Z_p, y-x\in t^iH_r\}$$
$$\cup\{((i,x),(i+3,y))\mid i\in Z_6, x,y\in Z_p, y-x\in t^{i+4}H_r\}.$$

依前述，如 H_{6r}表示 Z_p^* 中的唯一的 $6r$ 阶子群，特别地，对 $n=1,2,3,4$ 分别令 $s=t^6,t^3,t^2,t$，则 $H_r=\langle s\rangle$成立. 然后定义

$$B(6p,r)=\begin{cases}B_1(6p,r) & \text{当 } r \text{ 为奇数时},\\ B_2(6p,r) & \text{当 } r \text{ 为偶数时}.\end{cases}$$

不难知，除 $B_3(6p,1)=pK_{3,3}$(见下面的(2))，$B_n(6p,r)$是 $6p$ 阶连通的 $3r$ 度正则的简单无向图. 还有

(1) "$B_n(6p,r)$是可解对称图". 为此，在 $V(B_n(6p,r))$上定义映射 π,ρ,v,β，即$(i,x)^\pi=(i,x+1)$；$(i,x)^\rho=(i+1,tx)$；$(i,x)^v=(i,sx)$；当 i 是偶数时，$(i,x)^\beta=(i+4,x)$，当 i 是奇数时，$(i,x)^\beta=(i+2,x)$. 注意到总有 $t^3H_r=-H_r$，直接验证知，$\pi,\rho,v,\beta\in\mathrm{Aut}(B_n(6p,r))$，且若令 $P=\langle\pi\rangle$，$K=\langle\pi,v\rangle$，$G=\langle\pi,v,\rho,\beta\rangle$，则 $P\trianglelefteq G$，$K\trianglelefteq G$，$K=P\rtimes\langle v\rangle$，$P\cong Z_p$，$\langle v\rangle\cong Z_r$，$G/K\cong Z_3 wr Z_2$. 从而，$G$ 是可解群；$B_i=\{(i,x)\mid x\in Z_p\}(i\in Z_6)$是 P 的轨道，ρ 轮换 $B_i(i\in Z_6)$，故 G 在 $V(B_n(6p,r))$上传递；若令 $v=(0,0)$，则 v 在 G 中的稳定子群 $G_v=\langle v,\rho^4\beta^2\rangle$在邻域 $X_1(v)$传递. 因此 $B_n(6p,r)$是 G-可解对称的.

(2) "当 $n=3,4$ 时，$B_n(6p,r)\cong G(2p,r)[3K_1]$且 $B(6p,r)$与 $G(2p,r)[3K_1]$不同构". 事实上，对 $n=1,2,3,4$ 都有$\langle\beta\rangle\trianglelefteq G$，故$\langle\beta\rangle$的轨道是 G 在 $V(B_n(6p,r))$上的 3-块，进一步可证，相应的块系 $\overline{X}$ 是 $\mathrm{Aut}(B_n(6p,r))$的唯一的由 3-块构成的块系(细节略). 又，容易验证，当 $n=1,2$ 时，块图 $\overline{X}\cong G(2p,3r)$；当 $n=3,4$ 时，$\overline{X}\cong G(2p,r)$且 $B_n(6p,r)\cong G(2p,r)[3K_1]$(由此也就知，$B_3(6p,1)=pK_{3,3}$). 依这些事实立刻得知(2)的判断.

例 2.5 $C(6p,r)$. 定义 $C_n(6p,r)(n=1,2)$.

$$n=1\text{ 时，令 } r\mid p-1, t\in Z_p^*, \text{使 } H_r=\langle t\rangle,$$
$$n=2\text{ 时，令 } 2r\mid p-1, t\in Z_p^*, \text{使 } H_{2r}=\langle t\rangle,$$

对 $n=1,2$，分别令 $s=t,t^2$，则总有 $H_r=\langle s\rangle$，而规定

$$V(C_n(6p,r))=\{(i,x)\mid i\in Z_6, x\in Z_p\},$$

$$E(C_n(6p,r))=\begin{cases}\{((i,x),(i+1,y))\mid i\in Z_6,x,y\in Z_p,y-x\in H_r\}, & 若 n=1,\\ \{((i,x),(i+1,y))\mid i\in Z_6,x,y\in Z_p,y-x\in t^iH_r\}, & 若 n=2.\end{cases}$$

还规定

$$C(6p,r)=\begin{cases}C_1(6p,r), & 当 r 是奇数时,\\ C_2(6p,r), & 当 r 是偶数时.\end{cases}$$

不难知,$C_n(6p,r)$是 $6p$ 阶连通的 $2r$ 度正则的简单无向图.有

(1) "$C_n(6p,r)$是可解对称图".为此,在 $V(C_n(6p,r))$上定义映射 π,ρ,v,σ,即$(i,x)^\pi=(i,x+1)$;对于 $C_1(6p,r)$,$(i,x)^\rho=(i+1,x)$,$(i,x)^\sigma=(-i,-x)$;对于 $C_2(6p,r)$,$(i,x)^\rho=(i+1,tx)$,$(i,x)^\sigma=(-i,-tx)$;$(i,x)^v=(i,sx)$.直接验证知,$\pi,\rho,v,\sigma\in \mathrm{Aut}(C_n(6p,r))$,且若令 $P=\langle\pi\rangle$,$K=\langle\pi,v\rangle$,$G=\langle\pi,v,\rho,\sigma\rangle$,则 $P\trianglelefteq G$,$K\trianglelefteq G$,$K=P\rtimes\langle v\rangle$,$P\cong Z_p$,$\langle v\rangle\cong Z_r$,$G/K\cong D_{12}$,从而 G 是可解群;$B_i=\{(i,x)\mid x\in Z_p\}(i\in Z_6)$是 P 的轨道,ρ 轮换 $B_i(i\in Z_6)$,故 G 在 $V(C_n(6p,r))$上传递;若令 $v=(0,0)$,则 $G_v=\langle v,\sigma\rangle$在 $X_1(v)$上传递.因此,$C_n(6p,r)$是 G-可解对称图.

(2) "当 r 为偶数时,$C_1(6p,r)\cong G(2p,r)[3K_1]-3G(2p,r)$;当 r 为奇数时,$C_2(6p,r)\cong G(2p,r)[3K_1]-3G(2p,r)$".只例证后者.因 r 是奇数且 $s=t^2$,故 $C_2(6p,r)$可以看做 $B_3(6p,r)$的一个生成子图.考虑 $B_3(6p,r)$的子图 $X_i(i\in Z_6)$:$V(X_i)=\{(i,x)\mid x\in Z_p\}\cup\{(i+3,y)\mid y\in Z_p\}$,$E(X_i)=\{((i,x),(i+3,y))\mid x,y\in Z_p,y-x\in t^{i+4}H_r\}$.由 $t^2\in H_r$ 和 $tH_r=-H_r$,直接验证知,$X_{i+3}\cong X_i\cong G(2p,r)$.比较 $B_3(6p,r)$和 $C_2(6p,r)$的边集知,$C_2(6p,r)$恰是从 $B_3(6p,r)$删去边子集 $\bigcup_{i\in Z_6}E(X_i)=E(X_2)\cup E(X_4)\cup E(X_6)$,故 $C_2(6p,r)\cong G(2p,r)[3K_1]-3G(2p,r)$($r$ 为奇数).

(3) "$C_1(6p,r)$与 $C_2(6p,r)$不同构".首先,$2p$ 个子集$\{(i,x)\mid i=0,2,4\}$,$\{(i,x)\mid i=1,3,5\}(x\in Z_p)$成为 $\mathrm{Aut}(C_n(6p,r))$的唯一的由 3-块构成的块系 $\overline{X}$.其次,对于 $C_1(6p,r)$,当 r 为奇数时,块图 $\overline{X}\cong G(2p,2r)$,当 r 为偶数时,$\overline{X}\cong G(2p,r)$;相反地,对于 $C_2(6p,r)$,当 r 为奇数时,$\overline{X}\cong G(2p,r)$,当 r 为偶数时,$\overline{X}\cong G(2p,2r)$.仿此,考虑所有可能的块系即得证.

例 2.6 字典式积

$K_2[3pK_1]=K_{3,3}[pK_1]=K_{p,p}[3K_1]$;

$K_3[2pK_1]=(K_3[2K_1])[pK_1]=K_{p,p,p}[2K_1]$;$C_6[pK_1]$;

$G(p,r)[6K_1]=(G(p,r)[3K_1])[2K_1]=(G(p,r)[2K_1])[3K_1]$;

$G(3p,r)[2K_1]$;$G(2p,r)[3K_1](r>1)$.

(1) 它们都是可解对称图.如 $\mathrm{Aut}(G(p,r)[6K_1])$包含可解子群 $Z_6wr(Z_p\rtimes Z_r)$对称地作用于 $G(p,r)[6K_1]$,其中 $Z_p\rtimes Z_r\leqslant AGL(l,p)$.

(2) 关于 $C_6[pK_1]$.直接验证知,$K_{p,p}[3K_1]-3K_{p,p}\cong C_6[pK_1]$.

(3) 关于 $G(3p,r)[2K_1]$.若定义图 X 如下:$r\mid p-1$,$V(X)=\{(i,x)\mid i\in Z_6,x\in Z_p\}$,$E(X)=\{((i,x),(i+1,y))\mid i\in Z_6,x,y\in Z_p,y-x\in H_r\}\cup\{((i,x),(i+4,y))\mid i\in Z_6,x,y\in Z_p,y-x\in H_r\}$.令$(\bar{i},x)=\{(i,x),(i+3,x)\}$,其中,$\bar{i}\in Z_6/(3)\cong Z_3$,那么,直接验证知$(\bar{i},x)\cup(\overline{i+1},y)$在 X 中导出非空子图 $K_{2,2}$当且仅当 $y-x\in H_r$.由此即可证得 $X\cong G(3p,r)[2K_1]$.又,当 r 为偶数时,也不难证,$G(3p,r)[2K_1]\cong(G(p,r)[2K_1])[3K_1]-3(G(p,r)[2K_1])$.

§3 G在$V(X)$上有长为p的块

在本节,设 X 是连通的 $6p$ 阶 G-可解对称图且 G 在 $V(X)$上有 p-块,记这些块的完全块系为 $\overline{X}=\{B_i|i\in Z_6\}$,$G$ 在 $\overline{X}$ 上作用的核为 K,令 $\overline{G}=G/K$,相应的块图也记为 $\overline{X}$,那么 $\overline{X}$ 是连通的 6 阶 $\overline{G}$-可解对称图,依引理 2.2,下面三种情况之一成立:(1) $\overline{X}=K_{3,3},\overline{G}=H\,wr\,Z_2$,其中,$H\cong Z_3$ 或 S_3; (2) $\overline{X}=K_3[2K_1],\overline{G}=Z_2^2\times S_3$ 或 Z_2wrS_3; (3) $\overline{X}=C_6,\overline{G}=D_{12}$.

引理 3.1 (1) $K\neq1$ 且 K 在每个块 B_i 上传递; (2) 若 $X\not\cong\overline{X}[pK_1]$($\overline{X}$ 如上述),则每个成分 K^{B_i}是真实的.

证明 若 $K=1$,则$|G|=|\overline{G}|$只有素因子 2 或 3,这与 $6p\,|\,|G|$且 $p\geqslant5$ 矛盾. $K\neq1$ 而$|B_i|=p$,故 K 在 B_i 上传递. 由[10]的引理 3.3 直接得(2). 证毕.

因此,以下总设 $\overline{X}\not\cong\overline{X}[pK_1]$,$\overline{X}$ 如上述,从而 K^{B_i}是真实的. 又,K 为可解群,故 $K\cong K^{B_i}\leqslant AGL(1,p)$. 于是,$K$ 只有一个等价的 p 次传递置换表示,那么对任意取定的 $v\in B_0,K_v\leqslant Z_{p-1}$ 在 $B_0-\{v\}$上半正则,而在每个 $B_i(i\neq0)$上都有唯一不动点 v_i(当 $K_v=1$ 时,不妨任意取定一个). 令 $P\in Syl_p(K)$,则 $K=P\rtimes H$,$H\leqslant Z_{p-1}$为 K 中的 Frobenius 补. 特别地,可以有 $H=K_v$,记 $P=\langle\pi\rangle,H=\langle v\rangle,|H|=r$,则$|P|=p,r|p-1,v^{-1}\pi v=\pi^s$,其中$\langle s\rangle$是 Z_p^* 的 r 阶子群 H_r. 令 $C=C_G(P)$,则有 $P\trianglelefteq G$ 和 $C\trianglelefteq G$. 在本节,所引入的上述各记号始终保持这里规定的含义.

引理 3.2 (1) P 在 G 中有补群 M 且 $H=K\cap M,CK=C\rtimes H$; (2) $G'\leqslant C$; (3) 如果 $\xi\in CK\cap M$,则存在 $\xi'\in C\cap M$,使 $\overline{\xi'}=\overline{\xi}$,这里 $\overline{x}$ 表示 $\overline{x}\in G/K$.

证明 (1) 由 Schur-Zassenhaus 定理可得. (2) 因为 $G/C\lesssim Aut(P)\cong Z_{p-1}$,故 $G'\leqslant C$. (3) 显然.

引理 3.3 当 $\overline{X}\cong K_{3,3},X\not\cong K_{3,3}[pK_1]$且 $\overline{G}\cong Z_3wrZ_2$ 时,$X\cong B_n(6p,r)(n=1,2,3$ 或 $4)$但 $X\not\cong B_3(6p,1)$.

证明 记$E(\overline{X})=\{(B_i,B_j)|2\nmid j-i\}$,于是 $\overline{G}=\langle\overline{\alpha},\overline{\beta}\rangle\rtimes\langle\overline{\gamma}\rangle$,从而 $G=\langle\alpha,\beta,\gamma,\pi,v\rangle$,其中,$\overline{\alpha}=(B_0B_4B_2)(B_3B_1B_5),\overline{\beta}=(B_0B_4B_2)(B_1B_3B_5),\overline{\gamma}=(B_0B_3)(B_4B_1)(B_2B_5)$,它们满足关系 $\overline{\alpha}^3=\overline{\beta}^3=\overline{\gamma}^2=1,\overline{\alpha\beta}=\overline{\beta\alpha},\gamma^1\overline{\alpha\gamma}=\overline{\alpha},\overline{\gamma}^{-1}\overline{\beta\gamma}=\overline{\beta}^2$. 又,$\overline{G}'=\langle\overline{\beta}\rangle$. 依引理 3.2,可设 $\alpha,\gamma\in M$ 而 $\beta\in C\cap M$. 由此并因 $C\cap K=C_k(P)=P$ 知,$\gamma^{-1}\beta\gamma\beta^{-2}\in C\cap M\cap K=1$,故 $\gamma^{-1}\beta\gamma=\beta^2$. 同理,$\beta v=v\beta,\alpha\beta=\beta\alpha,\beta^3=1$. 由 $\overline{G}'\leqslant CK/K,|G/K|=18$ 及$|\overline{G}'|=3$ 知,$|CK/K|=3,6,9$ 或 18,相应地,$|G/CK|=6,3,2$ 或 1 而$|G/C|=6r,3r,2r$ 或 r.

当$|CK/K|=3$ 时,因 $G/C\leqslant Aut(P)\cong Z_{p-1}$,故 G/C 和 G/CK 分别是 $6r$ 和 6 阶循环群. 由 $\overline{G}$ 的定义关系得 $G/CK=\langle\alpha\gamma CK\rangle$. 又因 $CK/C=CH/C=\langle vC\rangle$为 r 阶,故 $G/C=\langle\alpha\gamma C,vC\rangle$. 若$(\alpha\gamma C)^m(vC)^n=(\alpha\gamma)^m\gamma^nC$ 是 G/C 的生成元,注意$(\alpha\gamma)^mCK$ 是 G/CK 的生成元. 不失一般性,可设 $m=1$,即 $G/C=\langle\alpha\gamma v^nC\rangle$. 因 $v\in K\cap M$,显然可用 γ 代替 γv^n. 记 $\rho=\alpha\gamma$,则 $\overline{\rho}=(B_0B_1B_2B_3B_4B_5)$且 $G/C=\langle\rho C\rangle$. 因 CH/C 是 G/C 的 r 阶子群,故不妨 $\rho^6C=vC$,从而,ζ^6 与 v 在 P 上诱导了相同的自同构. 那么若记 $\rho^{-1}\pi\rho=\pi^t$,由 $v^{-1}\pi v=\pi^s$,就有 $t^6=s$. 又由 $\rho^6\in K\cap M=H$,得 $\rho^{6r}=1$. 然而$\langle\rho C\rangle=G/C$ 是 $6r$ 阶的,故 $o(\rho)=6r$ 而且还有 $o(t)=6r$. 类似地,当$|CK/K|=6$ 时,G/C 和 G/CK 分别为 $3r$ 和 3 阶循环群,ρ,t,s 同上述,就有 $t^3=s,o(\rho)=o(t)=3r$;当$|CK/K|=9$ 时,G/C 和 G/CK 分别为 $2r$ 和 r 阶循环群,而有 $t^2=s,o(\rho)=o(t)=2r$;当

$|CK/K|=18$ 时，$G=CK$ 而 G/C 为 r 阶循环群且 $t=s, o(\rho)=o(t)=r$. 显然，在各种情况下都有 $\rho^6 \in H$.

因 $B_0^\beta=B_4, B_i^\rho=B_{+1}$ 以及 $\langle\pi\rangle$ 在 B_i 上传递，故存在 k，使 $v^\beta=v^{\rho^4\pi^k}$. 总可按如下方式标记 $V(X)$：$V(X)=\{(i,x)\mid i\in Z_6, x\in Z_p\}$，使 $v=(0,0)$ 且

$$(i,x)^\pi=(i,x+1),\quad (i,x)^\rho=(i+1,tx).$$

$$(i,x)^v=(i,sx),\qquad (i,x)^\beta=\begin{cases}(i+4,x+kt^i), & i\text{ 为偶数},\\ (i+2,x+kt^i(1+t^4)), & i\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

事实上，首先总能对 $x\in Z_p$ 和 $i=0,1,2,3,4$，使 $(0,x)^\pi=(0,x+1)$，$(i,x)^\rho=(i+1,tx)$. 其次，用 $\rho^6\in H$ 及 $\rho^{-1}\pi\rho=\pi^t$，得 $(5,x)^\rho=(0,0)^{\pi^{t^{-5}x}\rho^6}=(0,0)^{(\rho^{-6}\pi\rho^6)^{t^{-5}x}}=(0,0)^{tx}=(0,tx)$. 又，$(i,x)^\pi=(0,t^{-i}x)^{\rho^i\pi\rho^{-i}\rho^i}=(0,t^{-i}x)^{\pi^{t^{-i}}\rho^i}=(0,t^{-i}(x+1))^{\rho^i}=(i,x+1)$. 因 $v^{-1}\pi v=\pi^s$ 且总有 $\rho^i v\rho^{-i}\in K\cap M=H$，故 $(i,x)^v=(0,0)^{\rho^i v\rho^{-i}\rho^i v^{-1}\pi^x v}=(0,0)^{\rho^i\pi^{sx}}=(i,sx)$. 最后，上述 $v^\beta=v^{\rho^4\pi^k}$ 即 $(0,0)^\beta=(4,k)$. 用 $\rho^{-1}\beta\rho=(\alpha\gamma)^{-1}\beta(\alpha\gamma)=\beta^2, \beta^3=1$ 及 $\beta\pi=\pi\beta$ 知，对偶数 i，有 $\rho^{-2}\beta\rho^2=\beta$，故 $(i,x)^\beta=(0,0)^{\rho^i\pi^x\beta}=(0,0)^{\beta\rho^i\pi^x}=(4,k)^{\rho^i\pi^x}=(i+4,x+kt^i)$；类似地，对奇数 i，$(i,x)^\beta=(i+2,x+kt^i(1+t^4))$.

现在可以确定 X 的结构了. 因 $(B_0,B_1)\in E(\overline{X})$ 且 $\langle\pi\rangle$ 在 B_0 上传递，故 $X_1^{B_1}(v)\neq\varnothing$. 又，$\overline{G}_{i\{B_0\},\{B_1\}}=1$，即 $G_{\{B_0\},\{B_1\}}=K$（用 $G_{\{B\}}$ 表示 G 中以集合方式不变 B 的稳定子群，G_B 表示以顶点方式不变 B 的稳定子群），那么由 G_v 在 $X_1(v)$ 上传递知，K_v 必在 $X_1^{B_1}(v)$ 上传递. 再由 K_v 在 $X_1^{B_1}(v)$ 上的正则性知，$|X_1^{B_1}(v)|=|K_v|=r$，故 X 是 $3r$ 度正则的. 取 $(1,a)\in X_1^{B_1}(v)$，就有 $X_1^{B_1}(v)=(1,a)^{K_v}=(1,a)^{\langle v\rangle}=\{(1,ah)\mid h\in H_r\}$，即 $(0,0)\sim(1,y)\Leftrightarrow y\in aH_r$. 用 $\langle\pi\rangle$ 和 $\langle\zeta\rangle$ 相继作用得 $(i,x)\sim(i+1,y)\Leftrightarrow y-x\in at^iH_r$. 由此得 $(5,x)\sim(0,y)\Leftrightarrow y-x\in at^5H_r$. 再用 β 作用得 $(1,x)\sim(4,y)\Leftrightarrow y-x\in at^5H_r+k(1-t^5(1+t^4))$. 最后，用 ρ^{i-1} 作用得

$$(i,x)\sim(i+3,y)\Leftrightarrow y-x\in at^{i+4}H_r+k(t^{i-1}-t^{i+4}(1+t^4)).$$

至此得知 $E(X)=\{((i,x),(i+1,y))\mid i\in Z_6, x,y\in Z_p, y-x\in at^iH_r\}\cup\{((i,x),(i+3,y))\mid i\in Z_6, x,y\in Z_p, y-x\in at^{i+4}+k(t^{i-1}-t^{i+4}(1+t^4))\}$.

1. 当 $r>1$ 时，$s\neq1$. 由 $(4,k)=(0,0)^\beta=(0,0)^{v\beta}=(0,0)^{\beta v}=(4,k)^v=(4,sk)$ 得 $k=sk$，从而 $k=0$. 若还有 $a=0$，上述 $E(X)$ 表明 $X=pK_{3,3}$，与 X 的连通性矛盾，故必 $a\neq0$. 于是，$x\to a^{-1}x\ (x\in Z_p)$ 是加法群 Z_p 的自同构，那么，不失一般性，可设 $a=1$. 这样，就有 $E(X)=\{((i,x),(i+1,y))\mid y-x\in t^iH_r\}\cup\{((i,x),(i+3,y))\mid y-x\in t^{i+4}H_r\}$. 又，对 $i=1,4$，分别得 $(1,x)\sim(4,y)\Leftrightarrow y-x\in t^5H_r$ 和 $(4,x)\sim(1,y)\Leftrightarrow y-x\in t^8H_r=t^2H_r$，比较两种形式得 $t^3\in-H_r$. 如上述，当 $|CK/K|=3$ 时，$o(t)=6r$，故 $6r\mid p-1$ 且 $t^{3r}=-1$，从而 r 必是奇数. 因此，$X\cong B_1(6p,r)$ $(r>1)$. 当 $|CK/K|=6$ 时，$o(t)=3r$，而 $t^3=s$，故 $3r\mid p-1$ 且 $H_r=-H_r$，从而 r 必是偶数. 因此，$X\cong B_2(6p,r)$. 类似地，当 $|CK/K|=9$ 或 18 时，$X\cong B_3(6p,r)$ $(r>1)$ 或 $B_4(6p,r)$.

2. 当 $r=1$ 时，$H_r=1, s=1$，$E(X)$ 的表达式中符号 $\in$ 实为等号. 这时不能断言 $k=0$. 不过显然在 $k=a=0$ 时，仍得图 $pK_{3,3}$；又注意 $o(\overline{\rho})=6$ 及 $o(\rho)=o(t)$ 的阶，可知 $r=1$ 仅发生在 $|CK/K|=3$ 时，于是，在 $k=0, a=1$ 时，仍得图 $B_1(6p,1)$. 把这两种特殊情况下所得图分别记为 Y 和 Z. 根据 Subidussi 的陪集图的概念[9]，容易证明，k 和 a 的一般情况都可归结为 $k=0$ 且

$a=1$,即总有 $X\cong B_1(6p,1)$. 限于篇幅,为了不涉及那些概念,仅指出如下的同构映射,供读者去直接验证. 建立这些映射,从 Subidussi 的方法看,都是自然的. 注意到 $t+1\neq 0$. 当 $k\cdot\frac{t-1}{t+1}+a=0$ 时,令 $f:V(X)\to V(Y)$ 为 $(i,x)^f=(i,x+k\cdot\frac{t^i-1}{t+1})$;当 $k\cdot\frac{t-1}{t+1}+a\neq 0$ 时,令 $g:V(X)\to V(Z)$ 为 $(i,x)^g=(i,(k\cdot\frac{t-1}{t+1}+a)^{-1}(x+k\cdot\frac{t^i-1}{t+1}))$,那么 f 是 X 到 $Y\cong pK_{3,3}$ 的同构映射,从而,$k\cdot\frac{t-1}{t+1}+a=0$ 不可能;g 是 X 到 $Z\cong B_1(6p,1)$ 的同构映射. 证毕.

引理 3.4　当 $\overline{X}\cong K_{3,3}$,$X\ncong K_{3,3}[pK_1]$ 且 $\overline{G}\cong S_3 wr Z_2$ 时,$X\cong B_n(6p,r)$ $(n=3,4)$ 但 $B_3(6p,1)$ 除外.

证明　凡与引理 3.3 的证明类似之处均从略. 设 $E(\overline{X})=\{(B_i,B_j)\mid 2\nmid j-i\}$,则 $\overline{G}=\langle\bar\alpha,\bar\beta,\bar\delta,\bar\sigma,\bar\gamma\rangle$,从而 $G=\langle\alpha,\beta,\delta,\sigma,\gamma,\pi,v\rangle$,其中 $\bar\alpha,\bar\beta,\bar\gamma$ 如引理 3.3,而 $\bar\delta=(B_2B_4)$,$\bar\sigma=(B_2B_4)(B_3B_5)$. 有 $\overline{S}=\langle\bar\alpha,\bar\beta,\bar\delta,\bar\sigma\rangle\cong S_3\times S_3$,$\overline{Q}=\langle\bar\alpha,\bar\beta\rangle\cong Z_3\times Z_3$,$\overline{D}=\langle\bar\delta,\bar\gamma\rangle\cong D_8$,$\overline{G}=\overline{Q}\rtimes\overline{D}$,$\overline{G}'=\langle\bar\alpha,\bar\beta,\bar\sigma\rangle$. 由引理 3.2,可设 $\alpha,\beta,\delta,\sigma,\gamma\in M$ 且 $\alpha,\beta,\sigma\in C\cap M$. 进一步还有 $\beta v=v\beta$,$\alpha\beta=\beta\alpha$,$\alpha\gamma=\gamma\alpha$,$\alpha^3=\beta^3=\sigma^3=1$,$v\delta v^{-1}\delta^{-1}\in\langle v\rangle$. 记 ρ,t,k 如下理 3,3,容易验证 $|CK/K|=18$ 不可能,仅 $|CK/K|=36$ 或 72,相应地有 $o(\rho)=o(t)=2r$,$s=t^2$ 或 $o(\rho)=o(t)=r$,$s=t$. 对于 v,有 $G_v=\langle\rho^4\beta^2\pi^k\rangle\langle\sigma\rangle\langle v\rangle\langle\delta,\pi\rangle_v$. 对此,仅指出,由 $B_0^\sigma=B_0$,$|B_0|=p$ 及 $o(\sigma)=2$ 知,σ 在 B_0 上有不动点 w. 又,$B_0=\{w^{\pi^x}\mid x\in Z_p\}$ 且 $\sigma\pi=\pi\sigma$,故 $w^{\pi^x\sigma}=w^{\sigma\pi^x}=w^{\pi^x}$,即 σ 不变 B_0 的每个顶点,特别地,$\sigma=G_v$. 然后,由 $\overline{G}_{\{B_0\}}=\langle\bar\rho^4\bar\beta^2,\bar\sigma,\bar\delta\rangle=\langle\bar\rho^4\bar\beta^2\rangle\rtimes(\langle\bar\sigma\rangle\times\langle\bar\delta\rangle)$ 及 $P=\langle\pi\rangle\trianglelefteq G$,$K\trianglelefteq G$,对 $G_v=G_v\cap G_{\{B_0\}}$ 用 Dedekind 法则即求得上述 G_v. 进一步,$G_{v,\{B_1\}}=G_v\cap G_{\{B_1\}}=\langle\sigma\rangle\langle\gamma\rangle\langle\delta,\pi\rangle_v$ 且在 $X_1^{B_1}(v)$ 上传递,故 $X_1^{B_1}(v)=u^{G_v\{B_0\}}$,其中 $u\in X_1^{B_1}(v)$. 然而,与上边相同,σ 也不变 B_1 的每个顶点,于是 $X_1^{B_1}(v)=u^{\langle v\rangle\langle\delta,\pi\rangle_v}$. 值得注意 K_v 未必在 $X_1^{B_1}(v)$ 传递. 显然,仍可标记 $V(X)$ 如引理 3.3 且有 π,ζ,v,β 的几个等式.

先考虑 $r>1$. 为确定 X,还要再证几个事实. (1) "$k=0$",这与引理 3.3 同理.　(2) "$\delta\in G_v$". 因 $v\delta v^{-1}\delta^{-1}\in\langle v\rangle$,故 $v\delta=v^n\delta v$. 由 $B_0^\delta=B_0$,有 $(0,0)^\delta=(0,l)$. 又,$(0,0)^\delta=(0,0)^{v\delta}=(0,0)^{v^n\delta v}=(0,0)^{\delta v}=(0,l)^v=(0,sl)$. 于是 $l=sl$. 注意 $s\neq 1$,故 $l=0$,即有 $(0,0)^\delta=(0,0)$.　(3) "$(1,0)^\delta=(1,0)$". 易知 $(B_2B_4)(B_1B_3)\in\overline{G}'$. 由引理 3.2,可设 $\bar\xi=(B_2B_4)(B_1B_3)$ 且 $\xi\in C\cap M$. 与 $\sigma\in G_v$ 同理,有 $\xi\in G_v$. 又 $\bar\delta^{-1}\bar\rho\bar\delta=\bar\xi\bar\rho$,从而,$\bar\delta^{-1}\rho\delta\bar\rho^{-1}\xi^{-1}\in M\cap K=H$,故 $\delta^{-1}\rho\delta=v^n\xi\rho$. 于是,$(1,0)^\delta=(0,0)^{\rho\delta}=(0,0)^{\delta^{-1}\rho\delta}=(0,0)^{v^n\xi\rho}=(0,0)^\rho=(1,0)$.　(4) "$X_1^{B_1}(v)=u^{\langle v\rangle}\cup u^{\langle v\rangle\delta}$,其中,$u\in X_1^{B_1}(v)$". 因 $\delta\in G_v$,故 $\langle\delta,\pi\rangle_v=\langle\delta\rangle$. 又 $\bar\delta^2=1$,故 $\delta^2\in K\cap M=H$. 于是 $X_1^{B_1}\langle v\rangle=u^{\langle v\rangle\langle\delta,\pi\rangle_v}=u^{\langle v\rangle\langle\delta\rangle}=u^{\langle v\rangle}\cup u^{\langle v\rangle\delta}$.　(5) "设 $\delta^{-1}\pi\delta=\pi^m$,则 $m^2\in H_r$,从而 $mH_r=H_r$ 或 $H_r\cup mH_r=H_{2r}$". 由 $\delta^2\in H=\langle v\rangle$,结论显然成立. 现在可以确定 X 了. 若 $(1,0)\in X_1^{B_1}(v)$,由 (3) 和 (4) 得 $X_1^{B_1}(v)=\{(1,0)\}$,与引理 3.3 相同,$X=pK_{3,3}$. 因此,不失一般性,可设 $(1,1)\in X_1^{B_1}(v)$. $(1,1)^{v^i\delta}=(1,0)^{\pi v^i\delta}=(1,0)^{v^iv^{-i}\pi v^i\delta}=(1,0)^{\pi^{s^i}\delta}=(1,0)^{\delta^{-1}\pi^{s^i}\delta}=(1,0)^{\pi^{ms^i}}=(1,ms^i)$,故 $X_1^{B_1}(v)=(1,1)^{\langle v\rangle}\cup(1,1)^{\langle v\rangle\delta}=\{(1,h)\mid h\in H_r\}\cup\{(1,mh)\mid h\in H_r\}$. 当 $m\in H_r$ 时,得 $X_1^{B_1}(v)=\{(1,h)\mid h\in H_r\}$,从而 K_v 在 $X_1^{B_1}(v)$ 上传递,与引理 3.3 相同,注意到 $s=t^2$ 或 t,得知 $X\cong B_n(6p,r)$ $(r>1,n=3,4)$. 当 $m\notin H_r$ 时,由 (5) 得 $X_1^{B_1}(v)=\{(1,h)\mid h\in H_{2r}\}$,与引理 3.3 相同可得 $X\cong B_4(6p,r)$.

其次考虑 $r=1$,这时 $v=1$,$s=1$. 有如下事实.　(1) "$k=0$". 因 $\alpha\beta=\beta\alpha$ 且 $\alpha,\beta\in C\cap M$,故

$\langle \alpha,\beta,\pi\rangle$是交换群. $\bar{\gamma}^2=1$,则 $\gamma^2\in K\cap M=H=1$. 又因 $\alpha\gamma=\gamma\alpha$ 及 $o(\alpha)=3$,故 $\rho^4=\alpha$. 这样,若 $k\neq 0$,则 $p\,|\,o(\rho^4\beta^2\pi^k)$但是,注意$|G|=|\overline{G}|\,|K|=72p$,易知$|G_v|=12$. 那么,由 $\rho^4\beta^2\pi^k\in G_v$ 就引出了矛盾. (2) 与上述 γ 同理,有 $\delta^2=1$. 故 δ 在 B_0 上有不动点$(0,l)$. 显然,若 $\delta^{-1}\pi\delta=\pi^m$,则 $m=\pm 1$. 那么,对任何 $x\in Z_p$, $(0,x)^\delta=(0,l)^{\pi^{x-l}\delta}=(0,l)^{\pi^{m(x-l)}}=(0,mx+(1-m)l))$,现在来确定 x. 若 $m=1$,则$(0,0)^\delta=(0,0)$,即 $\delta\in G_v$,故$\langle\delta,\pi\rangle_v=\langle\delta\rangle$. 又,这时 $\delta^{-1}\pi\delta=\pi$,由此易知 δ 不变 B_1 的所有顶点. 于是,注意 $v=1$,就有 $X_1^{B_1}(v)=u^{\langle v\rangle\langle\delta,\pi\rangle_v}=u^{\langle\delta\rangle}=\{u\}$. 如引理 3.3,不失一般性,可设 $u=(1,0)$或$(1,1)$,且分别得到 $X=pK_{3,3}$或 $B_3(6p,1)$,这与 X 的连通性矛盾. 因此 $m=-1$. 这时,$(0,0)^\delta=(0,2l)=(0,0)^{\pi^{2l}}$,故$(0,0)^{\pi^{2l}\delta}=(0,0)$,即 $\pi^{2l}\delta\in G_v$. 于是$\langle\delta,\pi\rangle_v=\langle\pi^{2l}\delta\rangle$. 因 $\delta^{-1}\pi\delta=\pi^{-1}$,故$(\pi^{2l}\delta)^2=1$,而 $X_1^{B_1}(v)=u^{\langle\pi^{2l}\delta\rangle}=\{u,u^{\pi^{2l}\delta}\}$. 不失一般性,可设 $u=(1,0)$或$(1,1)$. 若 $l=0$,则$(0,0)^\delta=(0,0)$,与 $r>1$ 时相同,也可得$(1,0)^\delta=(1,0)$. 那么,如以前做过的,$u=(1,0)$不可能. 对于 $u=(1,1)$,有$(1,1)^\delta=(1,0)^{\pi\delta}=(1,0)^{\delta^{-1}\pi\delta}=(1,0)^{\pi^{-1}}=(1,-1)$,故 $X_1^{B_1}(v)=\{u,u^{\pi^{2l}\delta}\}=\{(1,1),(1,-1)\}$. 如引理 3.3,可得 $X\cong B_4(6p,2)$. 若 $l\neq 0$,考虑 π^l 在 G 上诱导的内自同构 φ,则$(\pi^{2l}\delta)^\varphi=\delta$. 再注意到 α,β,σ 都与 π 可交换,就不难归结为 $l=0$ 的情况. 证毕.

引理 3.5 当 $\overline{X}\cong K_3[2K_1]$, $X\ncong(K_3[2K_1])[pK_1]=K_3[2pK_1]$时,$X\cong G(3p,r)[2K_1]$.

证明 设 $E(\overline{X})=\{(B_i,B_j)\,|\,i,j\in Z_6,j-i\neq 3\}$. 由 $\overline{X}\cong K_3[2K_1]$的结构知,$\overline{G}\cong(Z_2\times Z_2)\rtimes S_3$ 或 Z_2wrS_3. 只讨论前一情况,而把后者留给读者. 这时,$\overline{G}=\langle\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}\rangle\times\langle\bar{\delta},\bar{\sigma}\rangle$,从而,$G=\langle\alpha,\beta,\gamma,\delta,\sigma,v,\pi\rangle$,其中 $\bar{\alpha}=(B_0B_3)(B_2B_5)$, $\bar{\beta}=(B_0B_3)(B_1B_4)$, $\bar{\gamma}=(B_1B_4)(B_2B_5)$, $\bar{\delta}=(B_0B_4B_2)(B_3B_1B_5)$, $\bar{\sigma}=(B_2B_4)(B_1B_5)$,它们满足关系 $\bar{\alpha}^2=\bar{\beta}^2=\bar{\gamma}^2=\bar{\delta}^3=\bar{\sigma}^2=1$, $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$ 两两可交换,$\bar{\sigma}^{-1}\overline{\delta\sigma}=\bar{\delta}^2$, $\bar{\delta}^{-1}\overline{\alpha\delta}=\bar{\beta}$, $\bar{\delta}^{-1}\overline{\beta\delta}=\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}^{-1}\overline{\gamma\delta}=\bar{\alpha}$, $\bar{\sigma}^{-1}\overline{\alpha\sigma}=\bar{\beta}$, $\bar{\sigma}^{-1}\overline{\beta\sigma}=\bar{\alpha}$, $\bar{\sigma}^{-1}\overline{\gamma\sigma}=\bar{\gamma}$. 实际上,$\overline{N}=\langle\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}\rangle\cong Z_2^3$, $\overline{S}=\langle\bar{\delta},\bar{\sigma}\rangle\cong S_3$. 易知 $\overline{G}'=\overline{N}\rtimes\langle\bar{\delta}\rangle$. 由引理 3.2,可设 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\sigma\in M$ 且 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in C\cap M$. 与引理 3.3 相同,可记 $\alpha^2=\beta^2=\gamma^2=\delta^3=1$, $\delta^{-1}\alpha\delta=\beta$, $\delta^{-1}\beta\delta=\gamma$, $\delta^{-1}\gamma\delta=\alpha$, $\alpha\beta=\beta\alpha$, $\alpha v=v\alpha$, $\sigma^{-1}\beta\sigma=\alpha$, $\delta^{-1}v\delta\in H$. 按如下方式标记$V(X)$:$V(X)=\{(i,x)\,|\,i\in Z_6,x\in Z_p\}$,使得 $v=(0,0)$且对 $i\in Z_6,x\in Z_p$,有$(i,x)^\pi=(i,x+1)$, $(i,x)^\delta=(i+4,x)$, $(i,x)^v=(i,sx)$.

存在 $k\in Z_p$,对 $i=0,2$,有$(i,x)^\alpha=(i+3,x+k)$;对 $i=0,4$,有$(i,x)^\beta=(i+3,x+k)$;对 $i=2,4$,有$(i,x)^\gamma=(i+3,x+k)$;以顶点方式,α 不变 B_1 和 B_4, β 不变 B_2 和 B_5, γ 不变 B_0 和 B_3.

事实上,由 $o(\pi)=p$, $o(\delta)=3$, $\pi\delta=\delta\pi$ 及 $\delta^{-1}v\delta\in H$,易知 π,δ 和 v 的上述三个等式. 由 $\alpha\pi=\pi\alpha$ 知,若$(0,0)^\alpha=(3,k)$, $(2,0)^\alpha=(5,l)$,则$(0,x)^\alpha=(3,x+k)$, $(2,x)^\alpha=(5,x+l)$. $(0,x)^\beta=(0,x)^{\delta^{-1}\alpha\delta}=(2,x)^{\alpha\delta}=(5,x+l)^\delta=(3,x+l)$,又,由 $\alpha\beta=\beta\alpha$,有$(0,l-k)=(3,l)^\alpha=(0,0)^{\beta\alpha}=(0,0)^{\alpha\beta}=(3,k)^\beta=(0,k-l)$,故 $k=l$. 因此,对 $i=0,2$,有$(i,x)^\alpha=(i+3,x+k)$. 利用 $\delta^{-1}\alpha\delta=\beta$, $\delta^{-1}\beta\delta=\gamma$,可得关于 β,γ 相应的等式. 最后,由 $\gamma^2=1$, $|B_0|=p$ 知,γ 在 B_0 有不动点. 再由 $\gamma\in C\cap M$,就知 γ 以顶点方式不变 B_0. 同理,γ 以顶点方式不变 B_3;α,β 分别以顶点方式不变 B_1 和 B_4, B_2 和 B_5.

K_v 在 $X_1^{B_1}(v)$上传递. 事实上,若 $u,w\in X_1^{B_1}(v)$,则存在 $\varepsilon\in G_v$,使 $u^\varepsilon=w$. 于是 $\bar{\varepsilon}\in G/K$ 不变 B_0 和 B_1. 然而,$\{B_0,B_3\}$、$\{B_4,B_1\}$和$\{B_2,B_5\}$都是 G/K 在 $V(\overline{X})$上作用的非本原块,故 $\bar{\varepsilon}$ 也不变 B_3 和 B_4. 再注意到$(B_2B_5)\notin G/K$,就知 $\bar{\varepsilon}=1$,即 $\varepsilon\in K\cap G_v=K_v$. 在 $X_1^{B_1}(v)$中取$(1,a)$,不

失一般性，有 $a=0$ 或 1. $X_1^{B_1}(v)=(1,a)^{K_v}=(1,a)^{\langle v\rangle}=\{(1,ah)|h\in H_r\}$，即有 $(0,0)\sim(1,y)\Leftrightarrow y\in aH_r$. 由此出发，相继用 $\pi,\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 作用，得

$$E(X)=\{((i,x),(i+1,y))|i=0,4,2;x,y\in Z_p,y-x\in aH_r\}$$
$$\cup\{((i,x),(i+1,y))|i=3,1,5;x,y\in Z_p,y-x\in aH_r-2k\}$$
$$\cup\{((i,x),(i+4,y))|i\in Z_6,x,y\in Z_p,y-x\in aH_r-k\}.$$

先考虑 $r>1$. 这时 $s\neq1$. 因 $\alpha v=v\alpha$，故 $(3,k)=(0,0)^{\alpha}=(0,0)^{v\alpha}=(0,0)^{\alpha v}=(3,sk)$，从而 $k=0$. 于是，

$$E(X)=\{((i,x),(i+1,y))|i\in Z_6,x,y\in Z_p,y-x\in aH_r\}$$
$$\cup\{((i,x),(i+4,y))|i\in Z_6,x,y\in Z_p,y-x\in aH_r\}.$$

那么，$a=0$ 时，有 $X\cong pK_3[2K_1]$，这不可能；当 $a=1$ 时，注意到例 2.6 之(3)，有 $X\cong G(3p,r)[2K_1](r>1)$. 再考虑 $r=1$. 这时 $H_r=1$. 显然，在 $k=a=0$ 时，仍得到 $pK_3[2K_1]$；在 $k=0,a=1$ 时，得到 $G(3p,1)[2K_1]$. 记这两个特殊情况下的图分别为 Y 和 Z. 由 Sabidussi 的方法不难得到下面两个同构映射(读者可直接验证). 在 $k=a$ 时，令 $f:V(X)\to V(Y)$ 为 $(i,x)^f=(i,x)(i=0,4,2$ 时$)$，$(i,x)^f=(i,x-k)(i=3,1,5$ 时$)$，于是 $X\cong pK_3[2K_1]$，这表明 $k=a$ 不可能；在 $k\neq a$ 时，令 $g:V(X)\to V(Z)$ 为 $(i,x)^g=(i,\frac{x}{a-k})(i=0,4,2$ 时$)$，$(i,x)^g=(i,\frac{x-k}{a-k})(i=3,1,5$ 时$)$，于是 $X\cong G(3p,1)[2K_1]$. 证毕.

引理 3.6 当 $\overline{X}\cong C_6$ 且 $X\ncong C_6[pK_1]$ 时，$X\cong C_n(6p,r)$，$n=1,2$.

证明 记 $E(\overline{X})=\{(B_i,B_{i+1})|i\in Z_6\}$，则 $\overline{G}=\langle\overline{\rho},\overline{\sigma}\rangle\cong D_{12}$，其中，$\overline{\rho}=(B_0B_1B_2B_3B_4B_5)$，$\overline{\sigma}=(B_1B_5)(B_2B_4)$，$\overline{G}'=\langle\overline{\rho}^2\rangle$. 由引理 3.2，可设 $\rho,\sigma\in M$ 且 $\rho^2\in CK=CH$. 分两种情况来讨论，即 $\rho=CH$ 和 $\rho\notin CH$. 因与前面类似且较简单，故讨论从略.

§4 G 在 $V(X)$ 上有长为 3 的块

在本节，设 X 是连通的 $6p$ 阶 G-可解对称图且 G 在 $V(X)$ 上有 3-块，完全块系为 $\overline{X}$，G 在 $\overline{X}$ 上作用的核为 K，$\overline{G}=G/K$. 那么，$\overline{X}$ 是 $2p$ 阶的连通的 $\overline{G}$-可解对称图. 由引理 2.2，$\overline{X}$ 为下列图之一：$K_{p,p}$；$G(2p,r)$，$1<r\leqslant p-1$；$G(p,r)[2K_1]$. 总设 $X\ncong\overline{X}[3K_1]$，那么由[10]的引理 3.3，$K$ 在每个 3-块上的作用必是真实的，从而 $K\lesssim S_3$. 注意到引理 1.2 的证明过程知，K 必在每个 3-块上传递. 因此，$K\cong Z_3$ 或 S_3.

引理 4.1 假设 $X\ncong\overline{X}[3K_1]$，那么，当 $K\cong S_3$ 时，$X\cong\overline{X}[3K_1]-3\overline{X}$，其中 $\overline{X}$ 是连通的 $2p$ 阶可解对称图；当 $K\cong Z_3$ 且 $\overline{X}\cong K_{p,p}$ 或 $G(2p,r)(r>1)$ 时，G 在 $V(X)$ 上有 p-块，从而 X 是 §3 中的已知图.

证明 S_3 只有一个等价的 2-传递的 3 次置换表示，故当 $K\cong S_3$ 时，K 在每个 3-块 B_i 上都是等价的. 于是，与[7]的引理 4.1 或[10]的引理 3.5 的证明完全相同，知 $X\cong\overline{X}[3K_1]-3\overline{X}$. 当 $K\cong Z_3$ 且 $\overline{X}\cong K_{p,p}$ 时，$\overline{G}\cong T\,wr\,Z_2$，其中 $Z_p\leqslant T\leqslant AGL(1,p)$. 记 $P\in Syl_p(G)$，不难由 Sylow 定理证得 $P\leqslant G$. 因此，G 在 $V(X)$ 上有 p-块. 对 $\overline{X}\cong G(2p,r)(r>1)$ 同理. 证毕.

根据上述，以下设 $K\cong Z_3$，$\overline{X}\cong G(p,r)[2K_1]$ 且 $X\ncong(G(p,r)[2K_1])[3K_1]$. 这时记 $V(\overline{X})$

$=\{B_x^n \mid n\in Z_2, x\in Z_p\}$，$E(\overline{X})=\{(B_x^m,B_y^n)\mid m,n\in Z_2,x,y\in Z_p,y-x\in H_r\}$，其中 B_x^n 是 G 在 $V(X)$上的 3-块. 还记 $B_x=\{B_x^0,B_x^1\}$，则 B_x 是 $\overline{G}$ 作用于 $V(\widetilde{X})$时的长为 2 的非本原块，若记相应的块图为 $\widetilde{X}$ 且 $\overline{G}$ 作用于 $V(\overline{X})$上的核为 $\overline{N}=N/K$，那么 $\widetilde{X}\cong G(p,r)$且为 $\overline{G}/\overline{N}\cong G/N$-可解对称图. 将$V(X)$的子集 $B_x^0\cup B_x^1$ 也记为 B_x，显然 B_x 是 G 作用于 $V(X)$时的 6-块，N 是 G 作用于相应的块系(即 $V(\widetilde{X})$)上的核，G/N 对称地作用于 $\widetilde{X}$. 有 $\overline{G}\leqslant \mathrm{Aut}(\overline{X})=Z_2 wr(\mathrm{Aut}(G(p,r)))$，$\overline{N}\leqslant Z_2^p$.

引理 4.2 N 在每个 6-块 B_x 上传递；对所有 $x\in Z_p$，传递成分 N^{B_x}都同构且 $N^{B_x}\cong D_{2\times 6}$或 Z_6.

证明 设$(B_x,B_y)\in E(\widetilde{X})$，则$(B_y^1,B_x^0)$，$(B_y^1,B_x^1)\in E(\overline{X})$. $\overline{X}$ 是 $\overline{G}$-对称的，故存在 $\bar{\tau}\in \overline{G}_{(B_y^1)}$，使$(B_x^1)^{\bar{\tau}}=B_x^0$，也就有$(B_x^1)^\tau=B_x^0$，还有$(B_x)^\tau=B_x^\tau$ 且$(B_y)^\tau=B_y$. 因 $\widetilde{X}\cong G(p,r)$且可解群 G/N 对称作用于 $\widetilde{X}$，故 $G/N\leqslant \mathrm{AGL}(1,p)$. 那么，由 τ 同时不变 B_x，B_y 知 $\tau\in N$. 又 $K\leqslant N$ 且 K 在 B_x^1 上传递，这就得知 N 在 B_x 上传递. 最后，由 $N\leqslant G$ 及 G 在$\{B_x\mid x\in Z_p\}$上传递知，对所有 $x\in Z_p$，N 在 B_x 上传递且 N^{B_x}都同构.

设 $B\in\{B_x\mid x\in Z_p\}$. 因 B^0 和 B^1 是 N 在 B 上的两个 3-块，故 $N^B\leqslant S_3 wr Z_2$. 记 $M=S_3 wr Z_2$，$B^1=\{1,3,5\}$，$B^0=\{2,4,6\}$，则 $M=\langle\sigma_1,\eta_1,\sigma_2,\eta_2,\tau\rangle$，其中 $\sigma_1=(135)$，$\eta_1=(13)$，$\sigma_2=(246)$，$\eta_2=(24)$，$\tau=(12)(34)(56)$，有$\langle\sigma_1,\eta_1\rangle\cong\langle\sigma_2,\eta_2\rangle\cong S_3$，$\tau^{-1}\sigma_1\tau=\sigma_2$，$\tau^{-1}\eta_1\tau=\eta_2$，也就有 $M=\langle\sigma_1,\eta_1,\tau\rangle$. 因 N^B 是传递的且$\langle\sigma_1,\eta_1\rangle\times\langle\sigma_2,\eta_2\rangle$同时不变 B^1 和 B^0，故不失一般性可设 $\tau\in N^B$. 设$(B_x,B)\in E(\widetilde{X})$. 因顶点方式的稳定子群 $N_{B_x}\trianglelefteq N$，故 $N_{B_x}^B\trianglelefteq N^B$. 用 X 的连通性和 G 在 $V(X)$上的传递性，易知 $N_{B_x}^B\neq 1$. 必有 $3\nmid |N_{B_x}^B|$，否则，$\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle\cap N_{B_x}^B\neq 1$，从而 $B\cup B_x$ 在 X 中导出的子图 $X(B,B_x)\cong K_{6,6}$，这与 $X\ncong(G(p,r)[2K_1])[3K_1]$矛盾，故 $N_{B_x}^B$必是 N^B 的非平凡的正规的 2-子群. 今分析 N^B 的各种可能情况. 第一，$N^B\neq M$，这因 $M=S_3 wr Z_2$ 不含非平凡的正规 2-子群；第二，必有$|N^B|\neq 36$. 否则，令 T 和 D 分别是 M 的 Sylow 3-和 Sylow 2-子群且 $\tau\in D$，则 $T=\langle\sigma_2,\sigma_2\rangle\leqslant M$，$D\cong D_8$. 由$|M:N^B|=2$ 有 $M/N^B\cong D/(D\cap N^B)$是 2 阶群，故 $D\cap N^B\cong Z_4$ 或 Z_2^2. $\tau\in D\cap N^B$. 又易知 $\tau\notin Z(D)$，故 $D\cap N^B\cong Z_4$ 不可能. 若 $D\cap N^B\cong Z_2^2$，注意 $T\leqslant N^B$，不难知，这时 N^B 就不含非平凡的正规 2-子群. 总引出矛盾；第三，必有$|N^B|\neq 18$，否则，$N^B=\langle\sigma_1,\tau\rangle$，但是它没有非平凡的正规 2-子群，引出矛盾；第四，若$|N^B|=12$，记 $S=\langle\sigma_1,\eta_1\rangle\times\langle\sigma_2,\eta_2\rangle$，则 $M/S=SN^B/S\cong N^B/S\cap N^B\cong Z_2$，从而 $S\cap N^B$ 是 N^B 的 6 阶子群. 显然，就有 $N^B=(S\cap N^B)\rtimes\langle\tau\rangle$. 无论 $S\cap N^B\cong Z_6$ 还是 S_3，τ 总依共轭不变 $S\cap N^B$ 的 3 阶子群及至少一个 2 阶元，那么它们必是$\langle\sigma_1\sigma_2\rangle$或$\langle\sigma_1\sigma_2^2\rangle$及某 2 阶元 $\eta_1\sigma_1\eta_2\sigma_2$. 故 $S\cap N^B=\langle\sigma_1\sigma_2,\eta_1\sigma_1^i\eta_2\sigma_2^i\rangle$或$\langle\sigma_1\sigma_2^2,\eta_1\sigma_1^i\eta_2\sigma_2^i\rangle$，它们都与 S_3 同构. 然而，对于后者，N^B 将没有非平凡的正规 2-子群. 因此，必有 $N^B=\langle\sigma_1\sigma_2,\eta_1\sigma_1^i\eta_2\sigma_2^i\rangle\rtimes\langle\tau\rangle=\langle\sigma_1\sigma_2,\eta_1\sigma_1^i\eta_2\sigma^i\rangle\rtimes\langle\tau\rangle\cong D_{12}$，特别地，$N_{B_x}^B=\langle\tau\rangle$，$o\langle\sigma_1\sigma_2\tau\rangle=6$. 最后，若$|N^B|=6$，显然，$N^B\cong\langle\sigma_1\sigma_2\tau\rangle\cong Z_6$，且也有$N'^B_{B_x}=\langle\tau\rangle$. 又，总有 $\sigma_1\sigma_2$ 与 τ 可交换. 证毕.

引理 4.3 当 $K\cong Z_3$，$\overline{X}\cong G(p,r)[2K_1]$且 $X\ncong\overline{X}[3K_1]$时，$X\cong G(3p,\frac{r}{2})[2K_1]$.

证明 1. 取 $v\in B_0^1$ 而$(B_0,B)\in E(\widetilde{X})$，来证 $N_{B_0}^B$在 $X_1^B(v)$上传递. 对 $u,w\in X_1^B(v)$，存在 a

$\in G_v$，使 $u^a=w$. 于是 $B_0^a=B_0, B^a=B$. 如证引理 4.2 时所做，必有 $a\in N$，即 $a\in N_v$，故 N_v^B 在 $X_1^B(v)$ 传递. 注意 $\langle\tau\rangle=N_{B_0}^B\leqslant N_v^B\leqslant N^B$. 在 $N^B\cong Z_6$ 时，因 $X\ncong\overline{X}[3K_1]$ 且 N^B 传递，故必有 $N_{B_0}^B=N_v^B$. 在 $N^B\cong D_{12}$时，同理 $|N_v^B|\neq 6$ 和 12，故 $N_v^B=N_{B_0}^B$ 或 Z_2^2. 无论怎样，N_v^B 在 $X_1^B(v)$上的轨道长都是 2. 然而，$N_{B_0}^B=\langle\tau\rangle$在 $X_1^B(v)$上的轨道长也为 2，因此，$N_{B_0}^B$在 $X_1^B(v)$上总是传递的. 显然还有 $|X_1^{B^1}(v)|=|X_1^{B^0}(v)|=1$. 且 $X(B_0,B)=3K_{2,2}$.

2. 证 N 在 G 中有补群 T. $\overline{N}$ 是 $\overline{G}$ 的可交换的正规子群且 $(|\overline{N}|,|\overline{G}:\overline{G}_{\{B\}}|)=1$. 又由 Frattini 论断有 $\overline{G}_{\{B\}}=\overline{N}\ \overline{G}_{\{B^1\}}$，显然还有 $\overline{G}_{\{B^1\}}\cap\overline{N}=1$，即 $\overline{N}$ 在 $\overline{G}_{\{B\}}$中有补群. 由 Gashütz 定理，$\overline{N}$ 在 $\overline{G}$ 中有补群 $\overline{M}$. 对于 $K\leqslant M$ 用相同的方法知，K 在 M 中有补群 T. 那么 $G=NM=NKT=NT$ 且由 $M\cap N=K$ 易知 $N\cap T=1$，即 N 在 G 中有补群 T.

3. 考虑 T 在 $V(\widetilde{X})$上诱导的作用，显然 $\widetilde{X}\cong G(p,r)$是 T-对称的. 由[1]，就有 $E(\widetilde{X})=\{(B_x,B_y)|x,y\in Z_p,y-x\in H_r\}$且 $T=\langle\pi,v\rangle\leqslant AGL(1,p)$，即有 $\pi^p=v^r=1, v^{-1}\pi v=\pi^s$，这里$\langle s\rangle=H_r$是 Z_p^* 的 r 阶子群，特别地 $B_x^\pi=B_{x+1}, T_{\{B_0\}}=\langle v\rangle$. 记 $K=\langle\sigma\rangle$. 因为 $K\leqslant N$ 且 $K^{B_x^\varepsilon}(x\in Z_p,\varepsilon\in Z_2)$都是真实的，那么对引理 4.2 中每个 $B\in\{B_x|x\in Z_p\}$及其 $\sigma_1\sigma_2\in N^B$，都可以取到 σ 做 $\sigma_1\sigma_2$ 在 N 中的原象；又，对于 $\tau\in N_{B_0}^{B_1}$在 N 中取定原象 τ_0，因 $N/K\leqslant Z_2^p$，在 N^{B_1}中有 $o(\tau)=2$ 且 $\sigma^{B_1}=\sigma_1\sigma_2$ 与 τ 可交换，故还可要求 $o(\tau_0)=2$. 不难知，在 N 中也有$\langle\tau_0,\sigma\rangle\cong Z_6$. 现在令 $L=\langle\tau_0,\sigma,T\rangle=\langle\tau_0,\sigma,\pi,v\rangle$，现证 G 的子群 L 已对称地作用于 X. 设 $v\in B_0, u\in X_1^{B_1}(v)$. 因 $\widetilde{X}$ 是 T-对称的，故 T 中有 α 对换 B_0 与 B_1；对任意相邻的 B_x 和 B_y，T 中有 β，使$(B_0,B_1)^\beta=(B_x,B_y)$. 对于边$(u,v)\in E(X)$相继用 $\tau_0\alpha\tau_0$，σ 和 σ^2 作用即可得到 $X(B_0,B_1)=3K_{2,2}$的所有边；再用 β 作用就得到 $X(B_x,B_y)$的所有边. 这表明 L 在边集合 $E(X)$上传递. 显然，α 作用于 $X(B_0,B_1)$时，至少将其中一个 $K_{2,2}$对换成自身，直接验证可知，α 还将对换这个 $K_{2,2}$的一条边. 综上述，L 在 X 上是 1-弧传递的，即 X 是 L-对称的.

4. $G/C_G(K)\lesssim \mathrm{Aut}(P)\cong Z_2$，故 $\pi\in C_G(K)$，即 $\sigma\pi=\pi\sigma$. 因此，总可记 $V(X)=\{(i,x)|i\in Z_6,x\in Z_p\}$，使$(i,x)^\pi=(i,x+1)$且$(i,x)^\sigma=(i+2,x)$. 现证对任何 $\alpha,\beta\in L$，τ_0^α 与 τ_0^β 都可交换. 为此，令 $\varepsilon=\tau_0^\alpha$，只要证 ε 与 τ_0 可交换. 对于 $y\in Z_p$，τ_0 或者以集合方式不变 B_y^0 和 B_y^1 或者对换 B_y^0 和 B_y^1. 然而$\langle\tau_0,\sigma\rangle\cong Z_6$ 且 $|B_y^\varepsilon|=3$，那么，对于前者，必有 $\tau_0^{B_y}=1$，对于后者，$\langle\tau_0,\sigma\rangle^{B_y}$必是正则的，从而 $\tau_0^{B_y}=(12)_y(34)_y(56)_y$，这里$(ij)_y$ 表示(i,y)与(j,y)的对换. 因$\langle\varepsilon,\sigma\rangle=\langle\tau_0,\sigma\rangle^\alpha\cong Z_6$，故上述论断对 ε 亦然. 不过，当 ε 对换某对 B_y^0 和 B_y^1 时，还要依如下方式来断言 $\varepsilon^{B_y}=(12)_y(34)_y(56)_y$ 成立. 事实上，若不然，则 $\varepsilon^{B_y}=(12)_y(36)_y(54)_y$ 等五种其它情况. 这时，$(\tau_0\varepsilon)^{B_y}$或为 2 阶或为$(135)_y(264)_y$或为$(153)_y(246)_y$. 然而，在 G/K 中，由 $\bar{\tau}_0\bar{\varepsilon}\in\overline{N}\leqslant Z_2^p$ 知，$(\tau_0\varepsilon)^2\in\langle\sigma\rangle$. 注意到 $\sigma^{B_y}=(135)_y(246)_y$，引出矛盾. 以上表明，对任何 $y\in Z_p$，$\tau_0^{B_y}$ 与 ε^{B_y}可交换，从而 $\tau_0\varepsilon=\varepsilon\tau_0$. 这样，$\langle\tau_0,\sigma\rangle$在 L 中的正规闭包 $M=\langle\sigma,\tau_0^\alpha|\alpha\in L\rangle$就是交换群且 $S=\langle\tau_0^\alpha|\alpha\in L\rangle$是 M 的 Sylow 2-子群. 由 Schar $M\trianglelefteq L$ 得 $S\trianglelefteq L$. 因此，S 在 $V(X)$上的轨道就是 L 在 $V(X)$上的 2-块. 注意到 $|S|>2$，故 S 在相应的块系上的作用是非真实的. 由[10]的引理 3.3 知，$X\cong G(3p,r')[2K_1]$. 比较 X 的度得 $r'=\frac{r}{2}$，即 $X\cong G(3p,\frac{r}{2})[2K_1]$. 证毕.

最后，综合引理 1.2，2.2，3.3－3.6，4.1 和 4.3，就得到本文的主要定理.

定理 设 $p>3$ 是素数，X 是 $6p$ 阶可解对称图，那么 X 与例 2.3—例 2.6 中给出的图之一同构.

分类表明，除了字典式积和删除的字典式积，连通的 $6p$ 阶可解对称图只有 $B(6p,r)$ 和 $C(6p,r)$ 是新发现的图.

参考文献

[1] C. Y. Chao, *On the classification of symmetric graphs with a prime number of vertices*, Trans. Amer. Math. Soc., 158(1971), 247—256.

[2] Y. Cheng and J. Oxley, *On weakly symmetric graphs of order twice a prime*, J. Combin. Theory Ser. B, 42(1987), 196—211.

[3] F. Harry, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

[4] B. Huppert, *Endliche Gruppen*, I, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1967.

[5] M. W. Liebeck and J. Saxl, *Primitive permutation groups containing an element of large prime order*, J. London Math. Soc., (2)31(1985), 237—249.

[6] C. E. Praeger, *Imprimitive symmetric graphs*, Ars. Combin. 19A(1985), 149—163.

[7] C. E. Praeger, R. J. Wang and M. Y. Xu, *Symmetric graphs of order a product of two distinct primes*, J. Combin. Theory Ser. B, 58(1993), 299—318.

[8] C. E. Praeger and M. Y. Xu, *Vertex-primitive graphs of order a product of two distinct primes*, J. Combin. Theory Ser. B., 59(1994), 245—266.

[9] G. O. Sabidussi, *Vertex-transitive graph*, Monatsh. Math., 68(1964), 426—436.

[10] R. J. Wang and M. Y. Xu, *A classification of symmetric graphs of order 3p*, J. Combin. Theory Ser. B, 58(1993), 197—216.

[11] H. Wielandt, *Finite Permutation Graphs*, Academic Press, New York/London, 1964.

A Classification of Solvable Symmetric Graphs of Order $6p$

Wang Ruji

(Dept. of Math., Capital Normal University, Beijing 100037)

Abstract

Let X be a simple undirected graph and G a subgroup of $\mathrm{Aut}(X)$. X is said to be G-symmetric if G acts transitively on the set of ordered adjacent pairs of vertices of X. X is said to be symmetric if it is $\mathrm{Aut}(X)$-symmetric. X is said to be solvable symmetric graph if $\mathrm{Aut}(X)$ contains a solvable subgroup G such that X is G-symmetric. In this paper we give a classification for solvable symmetric graphs of order $6p$ where $p \geq 5$ is a prime.

Keywords graph, solvable group, permutation group, imprimitive action.