第15卷第4期 1995年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 15 No. 4 Nov. 1995

2-幂零代数与外导子*

卢业广
(合肥经济技术学院，合肥 230052)

摘　要　本文主要证明了以下定理：设 $\vec{\Delta}$ 是有限连通箭图，$A=k\vec{\Delta}/F^2$，则 A 到 $D(A)$ 的外导子为零的充要条件是 $\vec{\Delta}$ 不含长度为2的圈.

关键词　2-幂零代数，外导子，Hochschild 同调群.
分类号　AMS(1991)16E/CCL O153.3

设 A 是域 k 上的代数，X 是 $A-A$ 双模，记 A 到 X 的导子集的内导子集分别为 $\mathrm{Der}(A,X)$ 和 $\mathrm{InDer}(A,X)$，其中

$$\mathrm{Der}(A,X)=\{f\in \mathrm{Hom}_k(A,X)/f(x,y)=f(x)y+xf(y),\ \forall\, x,y\in A\},$$

$$\mathrm{InDer}(A,X)=\{f\in \mathrm{Hom}_k(A,X)/\exists\, x\in X \text{ 使得 } f=\delta_x\}.$$

这里 $\delta_x(y)=yx-xy$，$\forall\, y\in A$. 将 $\mathrm{Der}(A,X)/\mathrm{InDer}(A,X)$ 中的元素称为 A 到 X 的外导子. 用 $H^*(A,X)$ 表示 A 的系数在 X 中的上同调群，定义参见文献[1]，则 $H^i(A,X)=\mathrm{Ext}^i_{A^e}(A,X)$，$\forall\, i\geqslant 1$，其中 $A^e=A\otimes A^{op}$ 是 A 的包络代数. 令 $X=D(A)=\mathrm{Hom}_k(A,k)$，则易知 $H^i(A,D(A))$ 恰是代数 A 的 Hochschild 同调群 $H_i(A)$ 的对偶 $DH_i(A)$（参见文献[2]）.

设 $\vec{\Delta}$ 是有限箭图，$k\vec{\Delta}$ 表示相应的路代数，F 表示由 $\vec{\Delta}$ 的所有箭向生成的 $k\vec{\Delta}$ 的理想. 根据 Gabriel 定理[3]，代数闭域 k 上任一基代数 A 均可写成 $A=k\vec{\Delta}/I$ 的形式，其中 $F^m\subseteq I\subseteq F^2$ ($m\geqslant 2$). 特别地，如果 $I=F^2$，则称 $A=k\vec{\Delta}/I$ 为 2-幂零代数. $\vec{\Delta}$ 中的道路 $a_1\cdots a_n$ 称为长度为 n 的圈，如果 $a_i(i=1,\cdots,n)$ 均是箭向且 a_i 的终点与 a_{i+1} 的起点相同 ($2\leqslant i\leqslant n-1$)，同时 a_n 的终点与 a_1 的起点相重合. 利用 Gabriel 定理去计算代数的 Hochschild(上)同调群是一种新的途径（例如参见文献[4,5]）.

1989 年 D. Happel 给出了 A 到 A 的外导子为零的 2-幂零代数的完全刻划（参见[5]），本文给出了如下定理，它完全刻划了 A 到 $D(A)$ 的外导子为零的 2-幂零代数 A.

定理　设 $A=k\vec{\Delta}/F^2$，其中 $\vec{\Delta}$ 是有限连通箭图，则 A 到 $D(A)$ 的外导子为零当且仅当 $\vec{\Delta}$ 不含长度为2的圈.

为了证明这个定理，需要建立若干引理.

引理 1[6]　$\mathrm{Der}(A,X)/\mathrm{InDer}(A,X)=H^1(A,X)$.

引理 2　设 $A=k\vec{\Delta}/(\vec{\Delta})^2$ 且 $\vec{\Delta}$ 不含长度为2的圈，则 $H_1(A)=0$.

证明　$H_1(A)\cong DH^1(A,D(A))\cong D\mathrm{Ext}^1_{A^e}(A,D(A))$. 因为 $\mathrm{Ext}^1_{A^e}(A,D(A))$ 是 Hom_{A^e}

* 1992年10月14日收到. 94年4月7日收到修改稿.

$(R_1,D(A))$的子商，故只要证 $\mathrm{Hom}_{A^e}(R_1,D(A))=0$，其中$\cdots\to R_1\to R_0\to A\to 0$是 A 在 A^e 上的极小投射分解. 由[5]知 $R_1=\bigoplus_{i,j}P(i,j)^{r_{i,j}}$，其中 $P(i,j)$是 A^e 的相应于本原幂等元 $e_i\otimes e_j$ 的不可分解投射模，即 $P(i,j)=A^e(e_i\otimes e_j)$；而 $r_{i,j}=\dim\mathrm{Ext}_A^1(s(j),s(i))$恰为 $\vec{\Delta}$ 中顶点 i 到顶点 j 的箭向的个数. 于是

$$\mathrm{Hom}_{A^e}(R_1,D(A))=\mathrm{Hom}_{A^e}(\bigoplus_{i,j}P(i,j)^{r_{i,j}},D(A_1))$$
$$=\bigoplus_{i,j}(\mathrm{Hom}_{A^e}(P(i,j),D(A))^{r_{i,j}}=\bigoplus_{i,j}(D(e_jAe_i))^{r_{i,j}}.$$

如果 $\mathrm{Hom}_{A^e}(R_1,D(A))\neq 0$，则存在 i,j 使得 $\mathrm{Ext}_A^1(s(j),s(i))\neq 0$ 且 $e_jAe_i\neq 0$. 前者意味着 $\vec{\Delta}$ 中存在箭向 $i\to j$，后者意味着 $\vec{\Delta}$ 中存在 j 到 i 的道路(长度为 0 或 1)，从而得到 $\vec{\Delta}$ 中长度为 1 或 2 的圈(注意到因 $\vec{\Delta}$ 不存在长为 2 的圈，也不存在长为 1 的圈). 这与题设相矛盾，从而有 $H_1(A)=0$.

引理 3 令 $\Phi_i:\mathrm{Hom}_k(A,\mathrm{Hom}_k(A^i,k))\to\mathrm{Hom}_k(A^{i+1},k)$是按下述定义给出的 k-同构：

$$\Phi_i(f)(x\otimes a)=f(a)x,$$

其中 $x\in A^i,a\in -A$. 则 $\Phi_i(\mathrm{Der}(A,D(A^i))=D_i$，$\Phi_i(\mathrm{InDer}(A,D(A^i))=I_nD_i$. 其中

$$D_i=\{\psi\in D(A^{i+1})/\psi(x\otimes a\cdot b)=\psi(b\otimes a)+\psi(xa\otimes b),\ \forall\ x\in A^i,a,b\in A\},$$

$$\mathrm{In}D_i=\{\psi_{\square}\in DA^{i+1})/\exists\ \psi\in D(A^i),使\ \varphi_{\square}(x\otimes a)=\varphi(xa-ax),\ \forall\ x\in A^i,a\in A\}.$$

证明 容易验证下述交换图

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_k(A,D(A^i)) & \xrightarrow[\sim]{\Phi_i} & \mathrm{Hom}_k(A^{i+1},k) \\
\cup\,| & & \cup\,| \\
\mathrm{Der}(A,D(A^i)) & \xrightarrow{\Phi_i} & D_i \\
\cup\,| & & \cup\,| \\
\mathrm{InDer}(A,D(A^i)) & \xrightarrow{\Phi_i} & \mathrm{In}D_i
\end{array}$$

这表明 $\Phi_i(\mathrm{Der}(A,D(A^i))\subseteq D_i,\Phi_i(\mathrm{InDer}(A,D(A^i))\subseteq\mathrm{In}D_i,\forall\ \varphi_i(f)\in D_i$，则

$$\Phi_i(f)(x\otimes ab)=f(ab)(x),$$
$$\Phi_i(f)(bx\otimes a)=(f(a)(bx)=(f(a)\cdot b)(x),$$
$$\Phi_i(f)(xa\otimes b)=f(b)(xa)=(a\cdot f(b))(x).$$

这意味着 $f(ab)(x)=(f(a)\cdot b+a\cdot f(b))(x),\forall\ x\in A^i$，也即 $f\in\mathrm{Der}(A,D(A^i))$，故 $\Phi_i(\mathrm{Der}(A,D(A^i))=D_i$. 同理可证 $\Phi_i(\mathrm{InDer}(A,D(A^i))=\mathrm{In}D_i$.

定理的证明 由引理 1，A 到 $D(A)$的外导子为零当且仅当 $H_1(A)=0$. 再由引理 2 知只要证明必要性. 设 $H_1(A)=0$. 因为

$$H_1(A)\cong DH^1(A,D(A))=D(\mathrm{Der}(A,D(A))/\mathrm{InDer}(A,D(A)).$$

由引理 3 知 $H_1(A)=0$ 即意味着 $D_1=\mathrm{In}D_1$. 如果 $\vec{\Delta}$ 含有长度为 1 的圈 a，设 $s(a)=e(a)=e$，构造线性函数 $\delta\in D(A^2)$，δ 定义如下：

$$\delta(e,a)=1,\ \delta(x)=0,\ 如果\ x\in\Omega^2\ 且\ x\neq(e,a).$$

其中 $\Omega^2=\{(x_1,x_2)|x_1,x_2\in\Omega\}$是 A^2 的一组 k-基. 直接验证可知 $\delta\in D_1$(这里我们略去细节)，

但 $\delta \notin \mathrm{In}D_1$，从而得到矛盾. 事实上，

如果 $\delta = \varphi_{[\,]}$，$\varphi \in D(A)$，则得出下述矛盾：

$$\delta((e,\alpha)) = \varphi_{[\,]}((e,\alpha)) = \varphi(e\alpha - \alpha e) = 0.$$

如果 $\vec{\Delta}$ 含有长度为 2 的圈 $1 \cdot \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\leftrightarrows}} \cdot 2$，则构造线性函数 $\delta \in D(A^2)$：

$$\delta((\alpha,\beta)) = 1, \quad \delta((\beta,\alpha)) = 1,$$

$$\delta(x) = 0, \quad \text{如果 } x \in \Omega \text{ 且 } x \neq (\alpha,\beta),(\beta,\alpha).$$

则直接验证 $\delta \in D_1$，我们给出其中两个主要等式：

$$0 = \delta((e_1,\alpha\beta)) = \delta((\beta,\alpha)) + \delta((\alpha,\beta)),$$

$$0 = \delta((e_2,\alpha\beta)) = \delta((\alpha,\beta)) + \delta((\beta,\alpha)),$$

但 $\delta \neq \mathrm{In}D_1$。事实上对于 $\varphi \in D(A)$，

$$\varphi_{[\,]}((\alpha,\beta)) = \varphi(\alpha\beta - \beta\alpha) = 0 \quad (\text{因为 } A \text{ 是 2- 幂零的}),$$

从而 $\vec{\Delta}$ 不含长度为 2 的圈.

参 考 文 献

[1] G. Hochschild, *On the cohomology groups of an associative algebra*, Ann of Maths, 46(1946), 58—67.

[2] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.

[3] P. Gabriel, *Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras*, Springer Lecture Notes, 831(1980), 1—71.

[4] C. Cibils, *Hochschild homology of algebra whose quiver has no oriented cycles*, Springer Lecture Notes, 1177(1986), 55—59.

[5] D. Happel, *Hochschild cohomology of finite-dimensinal algebra*, Springer Lecture Notes, 1404 (1989), 108—126.

[6] N. Jacobson, *Basic Algebra I*, W. H. Free man and Company, 1980.

On 2-Nilpotent Algebras and Extern-Deriver

Lu Yeguang

(Heifei Institute of Economics and Technology. Hefei 230052)

Abstract

The main result of the paper is the following:

Theorem If $\vec{\Delta}$ is a finite connected quiver and $A = k\vec{\Delta}/F^2$, then the extern-deriver from A to $D(A)$ is zero if and only if $\vec{\Delta}$ contains no loop of length 2.

Keywords 2-nilpolent algebra, extern deriver, Hochschild homological group.