第15卷第4期 1995年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 15 No. 4 Nov. 1995

无挠左(右)Artin环是拟Frobenius环*

乌 成 伟
(吉林工学院基础部，长春 130012)

关键词 内积，左(右)内零化子，自内射环.
分类号 AMS(1991) 16D50/CCL O153.3

设 R 为有1的左(右)Artin环，如果对于任一整数 m 与 $r\in R$，$mr=0$ 仅当 $m=0$ 或 $r=0$ 才成立，称 R 为无挠左(右)Artin环. 它满足有理数域 $Q\subseteq R$，因而是有理数域 Q 上的左和右向量空间.

引理1 设 D 为一域，V 为 D 上右向量空间，则 V 上线性变换环 $\mathrm{End}V_D$ 为右自内射环和(Von Neumann)正则环.

定理1 设 R 为无挠左Artin环，$E=\mathrm{End}R$ 为 R 作为加群 $(R,+,0)$ 时的自同态环，则 E 是 R 作为 Q 上右向量空间时的线性变换环，从而是右自内射环和正则环.

为进一步讨论，引入内积与内零化子的概念. 设 M 为左 S-模，S^n 与 M^n 为直积，n 为自然数，$T\subseteq S^n$，$X\subseteq M^n$.

定义1 设 $t=(t_1,\cdots,t_n)\in S^n$，$x=(x_1,\cdots,x_n)\in M^n$，规定 $(t,x)=\sum_{i=1}^{n}t_ix_i$，称为 t 与 x 的内积. 若 S 为 M 的自同态环，$t_ix_i=t_i(x_i)$.

定义2 (i) 记 $T^{\perp}_{M^n}=(T)^{\perp}_{M^n}=\{x\in M\mid(t,x)=0,\forall\ t\in T\}$，称为 M^n 对 T 的右内零化子；记 ${}^{\perp}X_{S^n}={}^{\perp}(X)_{S^n}=\{t\in S^n\mid(t;x)=0,\forall\ x\in X\}$，称为 S^n 对 X 的左内零化子. (ii) 若 ${}^{\perp}(T^{\perp}_{M^n})_{S^n}=T$，称 T 为 S^n 对 M^n 的左内零化子；若 $({}^{\perp}X_{S^n})^{\perp}_{M^n}=X$，称 X 为 M^n 对 S^n 的右内零化子；若 $S=M$，称 T 为 S^n 的左内零化子，X 为 S^n 的右内零化子.

引理2 设 S 为右(左)自内射环，则有限维自由模 S^n 的任一有限生成的左(右)子模 N 为 S^n 的左(右)内零化子.

引理3 设 R 为无挠左Artin环，$E=\mathrm{End}R$ 为 R(作为加群 $(R,+,0)$)的自同态环，k 为任一自然数，则对任何有限个元 $a_1,\cdots,a_m\in E^k$ 有 $N=\sum_{i=1}^{m}Ea_i$ 为 E^k 对于 R^k 的左内零化子.

定理2 设 R 为无挠左Artin环，$E=\mathrm{End}R$ 为 R 作为加群 $(R,+,0)$ 的自同态环，$R_L=\mathrm{End}R_R$ 为右 R-模 R_R 的自同态环，则 E 为内射左 R_L-模.

引理4 若 R 为左或右自内射环，且其右零化子满足升链条件，则 R 为QF(即拟Frobenius)环.

* 1992年10月21日收到. 94年4月8日收到修改稿.

定理3 每一无挠左 Artin 环均为 QF 环.

证明 记 $R_L=\mathrm{End}R_R$，则 R 也是左 R_L-模，且映射

$$i:\begin{cases}R_L \to R,\\ t \to t(1)\end{cases}$$

为单射和满射. 任取 $t_1,t_2\in R_L$，$(t_1t_2)i=t_1t_2(1)=t_1(t_2)i$，又 $(t_1+t_2)(1)=t_1(1)+t_2(1)$，即 $(t_1+t_2)i=(t_1)i+(t_2)i$，因此 i 为左 R_L-模同构.

记 $E=\mathrm{End}R$ 为 R 作为加群时的自同态环. 由于 E 为内射左 R_L-模且 $R_L\subseteq E$，故 E 内有一包含 R_L 的内射左子模 $\hat{R}_L$ 为 R_L 的内射包络. 作映射

$$j:\begin{cases}\hat{R}_L \to R,\\ t \to t(1),\end{cases}$$

则 j 显然也是左 R_L-模同态，且 $j|_{R_L}=i$. 由于 i 为单同态，又 R_L 为 $\hat{R}_L$ 的本质左 R_L-模，故 $\ker j=0$，因此只能有 $\hat{R}_L=R_L$，即 R_L 为左自内射环.

由于 R 与 R_L 两个环同构，故 R 为左自内射环. 设

$$T_1\subseteq T_2\subseteq\cdots\subseteq T_k\subseteq\cdots$$

为 R 的任一右零化子升链. 记 ${}^{\perp}(T_i)_R$ 为 T_i 的左零化子，则

$${}^{\perp}(T_1)_R\supseteq{}^{\perp}(T_2)_R\supseteq\cdots\supseteq{}^{\perp}(T_k)_R\supseteq\cdots$$

为 R 的左零化子降链. 由于 R 为左 Artin 环，故有自然数 m 使 ${}^{\perp}(T_m)_R={}^{\perp}(T_{m+1})_R=\cdots$，因此有 $T_m=T_{m+1}=\cdots$，即 R 满足右零化子升链条件. 根据引理 4，R 为拟 Frobenius 环. 证完.

参 考 文 献

[1] C. Faith, *Algebra* Ⅱ, *Ring Theory*, Springer-Verlage Berlin Heidlberg New York, 1976.

The Maximal Rational Extension of Torsionfree Artinian Ring Is Quasi-Frobenius

Wu Chengwei

(Jilin Institute of Technology, Changchun 130012)

Abstract

The maximal rational extension of any associative ring R, which involves rational number field, is a selfinjective ring. The maximal rational extension of every left ideal of R is a left annulator of the maximal rational extension of R. If R is a torsionfree Artinian ring, then the maximal of R is a quasi-Frobenius ring.

Keywords inner product, left(ring) annulator, self injective ring.