具有两个二次代数曲线解的三次系统的代数极限环*

张 成
(大连大学工学院，大连 116012)

摘 要 本文证明了具有椭圆和抛物线解的三次系统可以存在代数极限环，纠正了文[4]的主要结果.

关键词 代数解，极限环.
分类号 AMS(1991) 34C05/CCL O175.12

迄今为止，对于具有两个二次代数曲线解的三次系统极限环的研究已有许多结果(见文[1],[2],[3],[4])，从它们的结果来看，除了具有两个相离圆解的三次系统可以存在代数极限环外，而其余情形均不存在代数极限环，其实这一结果是值得商榷的. 本文证明了具有椭圆和抛物线解的三次系统可以存在代数极限环，并纠正了文[4]的主要定理.

考虑三次微分系统：

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{0\leqslant i+j\leqslant 3} a_{ij}x^iy^j, \\ \dot{y} = \sum\limits_{0\leqslant i+j\leqslant 3} b_{ij}x^iy^j, \end{cases} \tag{E_3}$$

其中 $\dot{x},\dot{y}$ 分别表示$\frac{dx}{dt}$和$\frac{dy}{dt}$.

设(E_3)有不相交的椭圆解和抛物线解. 不失一般性，可设

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ F(x,y) = y - ax^2 - bx - c = 0 \end{cases} \tag{1}$$

(其中 $a\neq 0, b\neq 0$)为(E_3)的解. 有如下定理.

定理 1 以二次曲线(1)为解的三次系统(E_3)其充要条件是化为如下形式：

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha yF(x,y) + (\beta x + \gamma)\varphi(x,y) = P(x,y), \\ \dot{y} = -\alpha xF(x,y) + [\beta(-bx + 2y - 2c) + \gamma(2ax + b)]\varphi(x,y) = Q(x,y), \end{cases} \tag{2}$$

其中 α,β,γ 均为任意常数.

证明 充分性显然，现证必要性.

由文[3]知(E_3)具有二次代数曲线解 $\varphi(x,y)=0$ 的充要条件是(E_3)可化为如下形式：

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y(k_1x^2 + k_2xy + k_3y^2 + k_4x + k_5y + k_6) + (k_7x + k_8y + k_9)(x^2 + y^2 - 1) = P_3(x,y), \\ \dot{y} = 2x(k_1x^2 + k_2xy + k_3y^2 + k_4x + k_5y + k_6) + (k_{10}x + k_{11}y + k_{12})(x^2 + y^2 - 1) = Q_3(x,y), \end{cases} \tag{3}$$

* 1993年4月17日收到. 大连大学科研基金资助.

其中 $k_i(i=1,2,\cdots,12)$ 均为任意常数.

再令系统(3)有解 $F(x,y)=0$,则沿着抛物线 $F(x,y)=0$ 有:

$$\frac{\partial F}{\partial X}\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}\equiv 0.$$

即 $Q_3(x,y)-(2ax+b)\cdot P_3(x,y)\equiv 0$.

将 $y=ax^2+bx+c$ 代入上式,并由 $1,x,x^2,x^3,x^4,x^5,x^6,x^7$ 线性无关有:

$$4a^4k_3-2a^4k_8=0, \quad ①$$

$$a^3k_{11}+4a^3k_2+14a^3bk_3-2a^3k_7-7a^3bk_8=0, \quad ②$$

$$\begin{aligned}&4a^2k_1+a^2k_{10}+3a^3bk_{11}+10a^2bk_2+(2a^2+18a^2b^2+12a^3c)k_3\\&\quad+4a^3k_5-5a^2bk_7-(2a^2+9a^2b^2+6a^3c)k_8-2a^3k_9=0,\end{aligned} \quad ③$$

$$\begin{aligned}&6abk_1+2abk_{10}+(a+3ab^2+3a^2c)k_{11}+a^2k_{12}+(2a+8ab^2+8a^2c)k_2\\&\quad+(4ab+10ab^3+30a^2bc)k_3+4a^2k_4+10a^2bk_5-(2a+4ab^2+4a^2c)k_7\\&\quad-(3ab+5ab^3+15a^2bc)k_8-5a^2bk_9=0,\end{aligned} \quad ④$$

$$\begin{aligned}&(2+2b^2+4ac)k_1+(2b+2b^3+12abc)k_2+(2b^2+2b^4+4ac+24ab^2c+12a^2c^2)k_3\\&\quad+6abk_4+(2a+8ab^2+8a^2c)k_5+4a^2k_6-(b+b^3+6abc)k_7\\&\quad+(2a^2-b^2-b^4-2ac-12ab^2c-6a^2c^2)k_8-(2a+4ab^2+4a^2c)k_9\\&\quad+(1+b^2+2ac)k_{10}+(b+b^3+6abc)k_{11}+2abk_{12}=0,\end{aligned} \quad ⑤$$

$$\begin{aligned}&2bck_1+(2c+4b^2c+4ac^2)k_2+(4bc+6b^3c+18abc^2)k_3+(2+2b^2+4ac)k_4\\&\quad+(2b+2b^3+12abc)k_5+6abk_6+(2a-2b^2c-2ac^2)k_7\\&\quad+(3ab-bc-3b^3c-9abc^2)k_8-(b+b^3+6abc)k_9+2bck_{10}+(c-a+3b^2c+3ac^2)k_{11}\\&\quad+(1+b^2+2ac)k_{12}=0,\end{aligned} \quad ⑥$$

$$\begin{aligned}&2bc^2k_2+(2c^2+6b^2c^2+4ac^3)k_3+2bck_4+(2c+4b^2c+4ac^2)k_5\\&\quad+(2+2b^2+4ac)k_6+(b-bc^2)k_7+(b^2+2ac-3b^2c^2-2ac^3)k_8\\&\quad+(2a-2b^2c-2ac^2)k_9+(c^2-1)k_{10}+(3bc^2-b)k_{11}+2bck_{12}=0,\end{aligned} \quad ⑦$$

$$\begin{aligned}&2bc^3k_3+2bc^2k_5+2bck_6+(bc-bc^3)k_8+(b-bc^2)k_9\\&\quad+(c^3-c)k_{11}+(c^2-1)k_{12}=0.\end{aligned} \quad ⑧$$

由①,②,③解得:$k_8=2k_3$,$k_{10}=-4k_1+2bk_2+2k_3-4ak_5-bk_7+2ak_9$,$k_{11}=-4k_2+2k_7$.

将上面的结果代入④并解得:

$$k_{12}=(2bk_1+2k_2+4ack_2-2bk_3-4ak_4-2abk_5-2ack_7+abk_9)/a.$$

代入⑤,⑥,⑦,⑧式并化简有:

$$(b^2-1-2ac)k_1+2bk_2+(1+2a^2-b^2+2ac)k_3-abk_4-ak_5+2a^2k_6=0,$$

$$\begin{aligned}&(b+b^3-abc)k_1+(1+2a^2+b^2+3ac)k_2+(3a^2b-b-b^3+abc)k_3\\&\quad-(a+ab^2+2a^2c)k_4+3a^2bk_6=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(2+\frac{2b^2c}{a}-2c^2\right)k_1+\left(b+\frac{2bc}{a}\right)k_2+\left(b^2+2ac-\frac{2b^2c}{a}-1+2c^2\right)k_3\\&\quad-3bck_4+(2a+c)k_5+(1+b^2+2ac)k_6=0,\end{aligned}$$

$$(bc^2-b)k_1+(c^2-1)k_2+(b+abc-bc^2)k_3+(2a-2ac^2)k_4+abk_5+abck_6=0.$$

从上面几个方程解得：

$$k_2=0,\quad k_3=k_1-\frac{ak_4}{b},\quad k_5=-\frac{k_4}{b},\quad k_6=\frac{-bk_1+ak_4+ck_4}{b}.$$

代入 k_8,k_{10},k_{11},k_{12}得

$$k_8=2(k_1-\frac{ak_4}{b}),\quad k_{10}=-2k_1+\frac{2ak_4}{b}-bk_7+2ak_9,\quad k_{11}=2k_7,\quad k_{12}=-2ck_7+bk_9.$$

代入系统(3)并整理得：

$$\begin{cases}\dot{x}=(k_7x+k_9)(x^2+y^2-1)+\frac{2k_4}{b}y(y-ax^2-bx-c),\\ \dot{y}=[k_7(-bx+2y-2c)+k_9(2ax+b)](x^2+y^2-1)-\frac{2k_4}{b}x(y-ax^2-bx-c).\end{cases}$$

令 $\alpha=\frac{2k_4}{b},\beta=k_7,\gamma=k_9$,则上面系统化为系统(2)的形式，$\alpha,\beta,\gamma$ 为任意常数.

定理 2 当 $\beta=0$ 时，系统(2)没有极限环，当 $\beta\neq0$ 时，它存在代数极限环 $x^2+y^2=1$.

证明 取 Dulac 函数 $B(x,y)=\frac{1}{(x^2+y^2-1)(y-ax^2-bx-c)}$计算：

$$\mathrm{div}(BP,BQ)=\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)=\frac{\beta}{y-ax^2-bx-c}.$$

故 $\beta=0$ 时，系统(2)可积，因此没有极限环. 而当 $\beta\neq0$ 时，由于 $x^2+y^2=1$ 与 $y=ax^2+bx+c$ 不相交，故在 $x^2+y^2=1$ 内部无闭轨线. 又因为系统(2)在 $x^2+y^2=1$ 上没有奇点，所以这时 $x^2+y^2=1$ 成为系统(2)的极限环. 证毕.

以上讨论的是 $b\neq0$ 的情形. 对于 $b=0$ 时，也可类似地讨论，其结论与上面的结果是一样的，仍然可以存在代数极限环. 在文[5]中作者已给出一个具体例子，这里不再详述.

作者对导师沈伯骞教授的指导深表谢意.

参 考 文 献

[1] P. S. Belevec, I. C. Kožuh, Differential'nye Uravnenija, 10(1974), 195—201, 369.
[2] P. S. Belevec, I. G. Kožuh, Differencial'nye Uravnenija, 10(1974), 1196—1204, 1339.
[3] 黄启宇等，数学学报，10(2)：223—237，1960.
[4] 高慧贞，福建师大学报，(1)：47—53，1983.
[5] 张成，辽宁师大学报，(2)：101—102，1992.

Algebraic Limit Cycle of a Cubic System with Two Quadratic Algebraic Curve Solutions

Zhang Cheng
(Dalian University, 116012)

Abstract

We prove that there may exist algebraic limit cycle in a cubic system with euiptic solution and parabolic solution. This conclusion corrects a main result of ref[4].

Keywords algebraic solution, limit cycle.