第15卷 增刊 数学研究与评论 Vol. 15 Supp
1995年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1995

关于p-除环上分块矩阵秩的一些恒等式*

王卿文 杨玉珍
(山东昌潍师专数学系，潍坊 261043) (青岛大学数学系，266071)

摘 要 本文给出了 p-除环上分块矩阵秩的一些恒等式，从而推广了文[1]的结果.

关键词 p-除环、矩阵、矩阵的秩.
分类号 AMS(1991) 115A33/CCL O151.21

§1 引言及预备知识

本文约定，Ω 是一个 p-除环，$\Omega^{m\times n}$表示 Ω 上的全体 $m\times n$ 矩阵，A^+表示 Ω 上的矩阵的广义逆[2]，$\mu(A)$表示由 A 的行向量张成的 Ω 上的左向量空间，$R(A)$表示由 A 的列向量张成的 Ω 上的右向量空间，I 表示单位阵，rank$A$ 表示 A 的秩.

文[3]给出了如下的猜想：在 Ω 上，恒有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A & 0\\ C & B\end{bmatrix}=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B+\operatorname{rank}(I-BB^+)C(I-A^+A).$$

文[1]证明并改进了这个猜想，还给出了几个关于 Ω 上矩阵秩的恒等式：

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A & 0\\ C & B\end{bmatrix}=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}[B,C(I-A^+A)]$$

$$=\operatorname{rank}B+\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A\\ (I-BB^+)C\end{bmatrix};$$

$$\operatorname{rank}(I-BB^+)C(I-A^+A)=\operatorname{rank}[B,C(I-A^+A)]-\operatorname{rank}B.$$

本文给出了关于 Ω 上的分块矩阵 $\begin{bmatrix}A & D\\ C & B\end{bmatrix}$ 的秩的四个恒等式，得到了一系列重要的推论，从而推广了文[1]的结果.

引理 1.1[4] 若 Ω 上的矩阵 P 和 Q 均可逆，则对任意的矩阵 A，只要可乘就有

$$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}PA=\operatorname{rank}PAQ=\operatorname{rank}AQ.$$

引理 1.2 设 $A\in\Omega^{m\times n}$，$B\in\Omega^{m\times t}$，$C\in\Omega^{s\times n}$，则

$$R(A)\cap R((I-AA^+)B)=\{0\};\tag{1.1}$$

$$\mu(A)\cap\mu(C(I-A^+A))=\{0\}.\tag{1.2}$$

证明 设 $\alpha\in R(A)\cap R((I-AA^+)B)$，则有 $Ax_1\in R(A)$，$(I-AA^+)Bx_2\in R((I-AA^+)$

---

* 1993年8月23日收到.

B)，使 $\alpha=Ax_1=(I-AA^+)Bx_2$. 因 $I-AA^+$ 是幂等阵，故 $(I-AA^+)\alpha=(I-AA^+)Ax_1=(I-AA^+)^2Bx_2=(I-AA^+)Bx_2=\alpha$. 因 $AA^+A=A$，故 $(I-AA^+)Ax_1=0$，从而 $\alpha=0$. 故(1.1)得证. 同理可证(1.2)式.

引理 1.3 设 $A\in\Omega^{m\times s}$，$B\in\Omega^{m\times t}$，$C\in\Omega^{k\times n}$，$D\in\Omega^{k\times n}$，则

(i) $\operatorname{rank}[A,B]=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B\Leftrightarrow R(A)\cap R(B)=\{0\}$;

(ii) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}C\\D\end{bmatrix}=\operatorname{rank}C+\operatorname{rank}D\Leftrightarrow\mu(C)\cap\mu(D)=\{0\}$.

证明 因 $R(A,B)=R(A)+R(B)$，$\mu(C)+\mu(D)=\mu\begin{bmatrix}C\\D\end{bmatrix}$，故由维数公式立得(i)与(ii).

§2 主要结果

下面，我们给出本文的基本定理.

定理 2.1 设 $A\in\Omega^{m\times n}$，$B\in\Omega^{s\times t}$，$C\in\Omega^{s\times n}$，$D\in\Omega^{m\times t}$，则

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A&D\\C&B\end{bmatrix}=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0&(I-AA^+)D\\C(I-A^+A)&B-CA^+D\end{bmatrix}\tag{2.1}$$

$$=\operatorname{rank}B+\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A-DB^+C&D(I-B^+B)\\(I-BB^+)C&0\end{bmatrix}\tag{2.2}$$

$$=\operatorname{rank}C+\operatorname{rank}\begin{bmatrix}(I-CC^+B)&0\\D-AC^+B&A(I-C^+C)\end{bmatrix}\tag{2.3}$$

$$=\operatorname{rank}D+\operatorname{rank}\begin{bmatrix}B(I-D^+D)&C-BD^+A\\0&(I-DD^+)A\end{bmatrix}.\tag{2.4}$$

证明 令

$$E=(I-AA^+)D,\tag{2.1a}$$

$$F=C(I-A^+A),\tag{2.1b}$$

$$G=B-CA^+D.\tag{2.1c}$$

因 $\begin{bmatrix}I&0\\-CA^+&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&D\\C&B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I&-A^+D\\0&I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&E\\F&G\end{bmatrix}$，故由引理 1.1 知，

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A&D\\C&B\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A&E\\F&G\end{bmatrix}.\tag{2.1d}$$

由引理 1.2 知，$R(A)\cap R(E)=\{0\}$，$\mu(A)\cap\mu(F)=\{0\}$. 下证

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A&E\\F&G\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A&0\\0&0\end{bmatrix}+\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0&E\\F&G\end{bmatrix}.$$

设 $\alpha\in R\left(\begin{bmatrix}A&0\\0&0\end{bmatrix}\right)\cap R\left(\begin{bmatrix}0&E\\F&G\end{bmatrix}\right)$，则一定有向量 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$，使

$$\alpha=\begin{bmatrix}A&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&E\\F&G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}.$$

从而，$Ax_1=Ey_2$. 故 $Ax_1\in R(E)$，$Ey_2\in R(A)$，而 $Ax_1=Ey_2$，从而 $Ax_1\in R(E)\cap R(A)=\{0\}$，即

$Ax_1=0$. 于是,$\alpha=0$,即 $R\left(\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)\cap R\left(\begin{bmatrix}0 & E\\ F & G\end{bmatrix}\right)=\{0\}$. 故由引理 1.3 知,

$$\operatorname{rank}\left[\begin{array}{cc:cc}A & 0 & 0 & E\\ 0 & 0 & F & G\end{array}\right]=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & E\\ F & G\end{bmatrix},$$

亦即

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A & 0 & E\\ 0 & F & G\end{bmatrix}=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & E\\ F & G\end{bmatrix}. \tag{2.1e}$$

由引理 1.1 知,

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A & 0 & E\\ 0 & F & G\end{bmatrix}&=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A & 0 & E\\ 0 & F & G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & I & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix}\\ &=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A & A & E\\ 0 & F & G\end{bmatrix};\end{aligned} \tag{2.1f}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A & A\\ 0 & F\end{bmatrix}&=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A & A\\ 0 & F\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & -I\\ 0 & I\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & F\end{bmatrix}\\ &=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}F.\end{aligned}$$

因 $\mu(A)\cap\mu(F)=\{0\}$,故由引理 1.3 知,$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A & A\\ 0 & F\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A\\ F\end{bmatrix}$. 而显有 $R\left(\begin{bmatrix}A\\ F\end{bmatrix}\right)\subseteq R\left(\begin{bmatrix}A & A\\ 0 & F\end{bmatrix}\right)$,故 $R\left(\begin{bmatrix}A\\ F\end{bmatrix}\right)=R\left(\begin{bmatrix}A & A\\ 0 & F\end{bmatrix}\right)$. 从而

$$\begin{aligned}R\left(\begin{bmatrix}A & A & E\\ 0 & F & G\end{bmatrix}\right)&=R\left(\begin{bmatrix}A & A\\ 0 & F\end{bmatrix}\right)+R\left(\begin{bmatrix}E\\ G\end{bmatrix}\right)\\ &=R\left(\begin{bmatrix}A\\ F\end{bmatrix}\right)+R\left(\begin{bmatrix}E\\ G\end{bmatrix}\right)=R\left(\begin{bmatrix}A & E\\ F & G\end{bmatrix}\right).\end{aligned}$$

故 $\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}A & A & E\\ 0 & F & G\end{bmatrix}\right)=\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}A & E\\ F & G\end{bmatrix}\right)$.

从而由(2.1e)—(2.1f)立得(2.1)式.

同理可证(2.2)—(2.4). 证毕.

由定理 2.1 立得下面的

推论 2.1 设 A,B,C,D 同定理 2.1 所述,则有

(i) $$\begin{aligned}\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}A & 0\\ C & B\end{bmatrix}\right)&=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}[B,C(I-A^+A)]\\ &=\operatorname{rank}B+\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}A\\ (I-BB^+)C\end{bmatrix}\right);\end{aligned} \tag{2.5}$$

(ii) $$\begin{aligned}\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}A & D\\ 0 & B\end{bmatrix}\right)&=\operatorname{rank}B+\operatorname{rank}[A,D(I-B^+B)]\\ &=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}(I-AA^+)D\\ B\end{bmatrix}\right);\end{aligned} \tag{2.6}$$

(iii) $\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}A & D\\ C & 0\end{bmatrix}\right)=\operatorname{rank}C+\operatorname{rank}[D,A(I-C^+C)]$

$$=\operatorname{rank}D+\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}C\\(I-DD^{+})A\end{bmatrix}\right);\tag{2.7}$$

(iv) $$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}0&D\\C&B\end{bmatrix}\right)=\operatorname{rank}D+\operatorname{rank}[C,B(I-D^{+}D)]$$

$$=\operatorname{rank}C+\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}(I-CC^{+})B\\D\end{bmatrix}\right);\tag{2.8}$$

(v) $$\operatorname{rank}[A,D]=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}(I-AA^{+})D=\operatorname{rank}D+\operatorname{rank}(I-DD^{+})A;\tag{2.9}$$

(vi) $$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A\\C\end{bmatrix}=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}C(I-AA^{+})=\operatorname{rank}C+\operatorname{rank}A(I-C^{+}C).\tag{2.10}$$

推论 2.1 中的(2.5)式就是文[1]中的定理 2.

推论 2.2 设 $A\in\Omega^{m\times n}$, $B\in\Omega^{n\times s}$,则

$$\operatorname{rank}AB=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}[B,I-A^{+}A]-n$$
$$=\operatorname{rank}B+\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}A\\I-BB^{+}\end{bmatrix}\right)-n.\tag{2.11}$$

证明 由引理 1.1 知,

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0&A\\B&I\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}I&-A\\0&I\end{bmatrix}\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0&A\\B&I\end{bmatrix}\operatorname{rank}\begin{bmatrix}I&0\\-B&I\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}-AB&0\\0&I\end{bmatrix}$$
$$=\operatorname{rank}AB+n.$$

由(2.8)式知,

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0&A\\B&I\end{bmatrix}=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}[B,I-A^{+}A]=\operatorname{rank}B+\operatorname{rank}\begin{bmatrix}I-BB^{+}\\A\end{bmatrix}.$$

故(2.11)得证.证毕.

推论 2.2 即文[1]中的定理 1.

定理 2.2 设 $A\in\Omega^{m\times n}$, $B\in\Omega^{s\times t}$, $C\in\Omega^{s\times n}$, $D\in\Omega^{m\times t}$, E,F,G 分别由(2.1a)—(2.1c)所定义,则

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A&D\\C&B\end{bmatrix}$$
$$=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}E+\operatorname{rank}[F,G(I-E^{+}E)]\tag{2.12}$$
$$=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}E+\operatorname{rank}G(I-E^{+}E)+\operatorname{rank}(I-G(I-E^{+}E)(G(I-E^{+}E))^{+}]F\tag{2.13}$$
$$=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}E+\operatorname{rank}F+\operatorname{rank}(I-FF^{+})G(I-E^{+}E).\tag{2.14}$$

证明 由(2.1)式及(2.9),(2.10)式,得

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A&D\\C&B\end{bmatrix}=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0&E\\F&G\end{bmatrix}$$
$$=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}[0,E]+\operatorname{rank}[F,G][I-(0,E)^{+}(0,E)]$$
$$=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}E+\operatorname{rank}[F,G]\begin{bmatrix}I&0\\0&I-E^{+}E\end{bmatrix}$$
$$=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}E+\operatorname{rank}[F,G(I-E^{+}E)]$$
$$=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}E+\operatorname{rank}G(I-E^{+}E)+\operatorname{rank}(I-G(I-E^{+}E)(G(I-E^{+}E)^{+}]F$$

$$= \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} E + \operatorname{rank} F + \operatorname{rank}[I - FF^{+}]G(I - E^{+}E).$$

证毕.

若令定理 2.2 中的 $D=0$,则由(2.13)式得

推论 2.3 设 A, B, C 同定理 2.2 所述,则

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B + \operatorname{rank}(I - BB^{+})C(I - A^{+}A).$$

此推论恰是文[1]的推论 1.

由(2.12)及(2.13)立得下面的

推论 2.4 设 A, B, C, D, E, F, G 同定理 2.2 所述,则

$$\operatorname{rank}[I-G(I-E^{+}E)(G(I-E^{+}E))^{+}]F=\operatorname{rank}[F, G(I-E^{+}E)]-\operatorname{rank} G(I-E^{+}E).$$

若令推论 2.4 中的 $D=0$,则立得

$$\operatorname{rank}(I - BB^{+})C(I - A^{+}A) = \operatorname{rank}[B, C(I - A^{+}A)] - \operatorname{rank} B.$$

这就是文[1]中的定理 3.

参 考 文 献

[1] 李桃生,p-除环上矩阵秩的恒等式,数学研究与评论,13:2(1993),275—278.

[2] 屠伯埙,p-除环上矩阵的广义逆,数学学报,29:2(1986),246—248.

[3] 屠伯埙,体上线性映射的子空间的维数及其应用,数学研究与评论,10:3(1990),327—332.

[4] 谢邦杰,环与体上的矩阵及两类广义 Jordan 形式,吉林大学自然科学学报,1(1978),21—26.

Some Identities on the Rank of Partitioned Matrices over a p -Division Ring

Wang Qingwen
(Dept. of Math., Changwei Teachers College, 261043)

Yang Yuzhen
(Qingdao University, 266071)

Abstract

In this paper, we derive some identities on the rank of partitioned matrices over a p -division ring. The results in [1] are generalized.

Keywords p -division ring, matrix, rank of matrix.