第15卷 增刊 数学研究与评论 Vol. 15 Supp
1995年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1995

关于对称矩阵的β-性质*

殷庆祥
(盐城师专数学系，江苏 224002)

摘　要　本文讨论了一个在对称矩阵计算中有用的概念：β-性质. 给出了对称矩阵具有β-性质的一个充分必要条件，以及在对称矩阵 A 具有 β-性质时，其常数 β 的确定.

关键词　数值代数，矩阵论，对称矩阵，β-性质.

分类号　AMS(1991) 65F/CCL O241.6, O151.2

在矩阵计算及误差分析过程中，有时需要对原矩阵 A 的行与列进行预处理，使之具有某种规范性或平衡性，这种过程称为Scaling，以改变原矩阵的条件数，从而减少计算过程中舍入误差的影响[1-3]. 这种 Scaling 过程，就是寻求适当的对角阵 $D_1>0, D_2>0$，来左乘和右乘原矩阵 A，得到新矩阵 D_1AD_2. 对于对称矩阵来说，自然希望得到的新矩阵仍具有对称性，因此取 $D_1=D_2=D>0$. 现在的问题是：什么样的矩阵适合Scaling？D 又如何选取？这就需要讨论矩阵 A 与 DAD 之间数值计算性态的关系. 本文为此引进了 β-性质的概念，并给出了对称矩阵具有β-性质的一个充要条件及其常数 β 的确定.

定义 1　对于对称矩阵 A，如果存在常数 $\beta>0$，成立：对任意对角阵 $D>0$ 和任意满足 $Ax=\lambda Dx$ 的数 λ 和单位向量 x，都有

$$|x^TAx|\geqslant\beta, \tag{1}$$

则称 A 具有 β-性质.

显然，如果对称矩阵 A 具有 β-性质，则 A 非奇异. 这是因为 Rayleigh 商 x^TAx 可以取得 A 的任一特征值. 但反过来不成立，即非奇异的对称矩阵未必具有 β-性质. 下面的引理将说明，x^TAx 事实上可以任意逼近 A 的任一主子矩阵的任一特征值.

先对 A, x, D 作相应的分块，设

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},\quad D=\mathrm{diag}(D_1,D_2), \tag{2}$$

其中 A_{22}为 $r\times r$ 方阵.

引理 2　设 A 为非奇异对称阵，μ 为 A_{22}的一个特征值. 则存在满足 $Ax^{(i)}=\lambda^{(i)}D^{(i)}x^{(i)}$的对角阵序列$\{D^{(i)}\}$，$D^{(i)}>0$，数列$\{\lambda^{(i)}\}$和单位向量序列$\{x^{(i)}\}$，使得

$$\lim_{i\to\infty}\lambda^{(i)}=\mu, \tag{3}$$

$$\lim_{i\to\infty}x^{(i)T}Ax^{(i)}=\mu. \tag{4}$$

* 1992年7月16日收到.

证明 引理的证明就是具体构造出序列$\{D^{(i)}\}$,$\{\lambda^{(i)}\}$及$\{x^{(i)}\}$来.不妨假设$\mu\geqslant0$,如果$\mu<0$,我们可以考虑$-A$.

先考虑下面方程组

$$A_{11}x_1+A_{12}x_2=\hat{D}_1x_1, \tag{5}$$

$$A_{21}x_1+A_{22}x_2=\lambda x_2. \tag{6}$$

我们选取对角阵$\hat{D}_1>0$的对角元充分大,使得$\hat{D}_1-A_{11}>0$,这样就有

$$x_1=(\hat{D}_1-A_{11})^{-1}A_{12}x_2, \tag{7}$$

$$(A_{22}+A_{21}(\hat{D}_1-A_{11})^{-1}A_{12})x_2=\lambda x_2 \tag{8}$$

考虑(8)式,当$\hat{D}_1>0$的元素充分大时,$A_{21}(\hat{D}_1-A_{11})^{-1}A_{12}\geqslant0$可以认为是$A_{22}$的一个小的扰动.根据Weyl单调性原理[4,p194],有$\lambda\geqslant\mu$,并且当$\hat{D}_1>0$的对角元趋于无穷时,λ以μ为极限.

下面证明在$\mu=0$时,$\lambda>0$.设A_{22}的特征值为

$$\lambda_r(A_{22})\leqslant\cdots\leqslant\lambda_k(A_{22})=\mu=0\leqslant\cdots\leqslant\lambda_1(A_{22}),$$

其相应的单位化特征向量为$u_r,\cdots,u_1$.设$U=(u_k,\cdots,u_1)$,$S=\{Uz\,|\,z\in R^k\}$为U的列向量张成的子空间.根据极大极小原理[4,p190],有

$$0=\mu=\min_{0\neq x\in S}\frac{x^TA_{22}x}{x^Tx}=\min_{\|z\|_2=1}z^TU^TA_{22}Uz, \tag{9}$$

及

$$\lambda\geqslant\min_{0\neq x\in S}\frac{x^T(A_{22}+A_{21}(\hat{D}_{11}-A_{11})^{-1}A_{12})x}{x^Tx}\geqslant0. \tag{10}$$

如果$\lambda=0$,则意味着有$0\neq x\in S$使$x^T(A_{22}+A_{21}(\hat{D}_{11}-A_{11})^{-1}A_{12})x=0$,但由(9)知$x^TA_{22}x\geqslant0$,由$(\hat{D}_1-A_{11})>0$知$x^TA_{21}(\hat{D}-A_{11})^{-1}A_{12}x\geqslant0$,故

$$x^TA_{22}x=0, \tag{11}$$

$$x^TA_{21}(\hat{D}_1-A_{11})^{-1}A_{12}x=0. \tag{12}$$

由S的定义可知,这时x就是A_{22}的相应于特征值$\mu=0$的特征向量,即

$$A_{22}x=0. \tag{13}$$

再由$(\hat{D}_1-A_{11})^{-1}>0$及(12)又得

$$A_{12}x=0. \tag{14}$$

(13),(14)说明矩阵A的后r列线性相关,与A非奇异矛盾.综上讨论,可以断言:当$\mu\geqslant0$时,必有$\lambda>0$.

下面来构造序列$\{D^{(i)}\}$,$\{\lambda^{(i)}\}$,$\{x^{(i)}\}$使(3),(4)成立.首先选一列$\{\hat{D}^{(i)}\}$满足:$\hat{D}_1^{(i)}>0$,$\hat{D}_1^{(i)}$的对角元关于i单调递增趋于正无穷,$\hat{D}_1^{(1)}$的对角元充分大使$\hat{D}_1^{(1)}-A_{11}>0$.再对每一个$\hat{D}_1^{(i)}$,由(8)确定$\lambda^{(i)}$,$\hat{x}_2^{(i)}$,由(7)确定$\hat{x}_1^{(i)}$,最后令

$$D^{(i)}=\mathrm{diag}(\hat{D}_1^{(i)}/\lambda^{(i)},I_r), \tag{15}$$

$$\hat{x}^{(i)}=\begin{bmatrix}\hat{x}_1^{(i)}\\ \hat{x}_2^{(i)}\end{bmatrix},\quad x^{(i)}=\frac{\hat{x}^{(i)}}{\|\hat{x}^{(i)}\|_2}. \tag{16}$$

我们来证明这样选取的$\{D^{(i)}\}$,$\{\lambda^{(i)}\}$,$\{x^{(i)}\}$即为所求.事实上,由于$\hat{D}_1^{(i)}$的元素趋于正无穷,

$(\hat{D}_1^{(i)}-A_{11})^{-1}\to 0$，从而由(7)，(8)知 $\lambda^{(i)}\to\mu$，$x_1^{(i)}\to 0$，结合(6)可知(3)，(4)成立.

在上述引理中，若将 A_{22}换成 A 的任一主子矩阵，引理的结论仍然成立. 注意到这一点，我们可以来证明本文的主要结果：

定理 3 对称矩阵 A 具有 β-性质的充分必要条件是：A 的所有主子矩阵非奇异.

证明 先证必要性. 设 μ 是 A 的某一主子矩阵的一个特征值，只须证明 $\mu\neq 0$ 即可. 由引理 2，存在$\{D^{(i)}\}$，$D^{(i)}>0$，$\{\lambda^{(i)}\}$及$\{x^{(i)}\}$，$Ax^{(i)}=\lambda D^{(i)}x^{(i)}$，使 $\mu=\lim\limits_{i\to\infty}x^{(i)^T}Ax^{(i)}$，又由于 A 具有 β-性质，故$|x^{(i)^T}Ax^{(i)}|\geqslant\beta>0$. 这样，$|\mu|=|\lim\limits_{i\to\infty}x^{(i)^T}Ax^{(i)}|=\lim\limits_{i\to\infty}|x^{(i)^T}Ax^{(i)}|\geqslant\beta>0$，即 $\mu\neq 0$.

充分性的证明用反证法. 设 A 不具有 β-性质，即有序列$\{D^{(i)}\}$，$D^{(i)}>0$，单位向量序列$\{x^{(i)}\}$及数列$\{\lambda^{(i)}\}$满足 $Ax^{(i)}=\lambda^{(i)}D^{(i)}x^{(i)}$但$\lim\limits_{i\to\infty}x^{(i)^T}Ax^{(i)}=0$，利用多次选取子序列的方法，可以假定我们选取的序列具有如下性质：

1° $\{x^{(i)}\}$收敛于单位向量 x.

2° 对每一个 j，$\{\lambda^{(i)}d_j^{(i)}\}$或者收敛于某一常数，或趋于无穷，其中 $D^{(i)}=\mathrm{diag}(d_1^{(i)},\cdots,d_n^{(i)})$. 设极限值为 γ_i，并令 $\Gamma=\mathrm{diag}(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$.

3° 序列$\{\lambda^{(i)}\}$具有相同的符号.

不妨假定 Γ 的前 r 个对角元为无穷，对 A，x，Γ 据此作相应的分块：

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\quad \Gamma=\mathrm{diag}(\Gamma_1,\Gamma_2),$$

对 $Ax^{(i)}=\lambda^{(i)}D^{(i)}x^{(i)}$取极限得 $Ax=\Gamma x$，显然有

1° $x_1=0$，$\|x_2\|_2=1$，

2° $A_{22}x_2=\Gamma_2x_2$，

3° $\Gamma_2\geqslant 0$ 或 $\Gamma_2\leqslant 0$.

由于假设，$0=\lim\limits_{v\to\infty}x^{(i)^T}Ax^{(i)}=x^TAx=x_2^TA_{22}x_2=x_2^T\Gamma_2x_2$，这样 $\Gamma_2x_2=0$，从而 $A_{22}x_2=0$，这与 A_{22} 非异矛盾.

由定理 3 容易得到下面的推论：

推论 4 (1) 若对称矩阵 A 具有 β-性质，则 A 的任何顺序主子矩阵都具有 β-性质.

(2) 正定矩阵和负定矩阵具有 β-性质，而且其 β 值即为矩阵 A 的特征值的绝对值中最小者.

对于具有 β-性质的一般对称矩阵，其常数 β 的确定由下面的定理给出：

定理 5 若对称矩阵 A 具有 β-性质，则常数 β 可取为

$$\beta=\min\{|\lambda|\,|\,\lambda\text{ 为 }A\text{ 的任一主子矩阵的特征值}\}.$$

证明 由定义(1)，$\beta=\inf\limits_{Ax=\lambda Dx,D\geqslant 0,x^Tx=1}|x^TAx|=\inf\limits_{Ax=\pm Dx,D\geqslant 0,x^Tx=1}x^TDx$，由于条件 $Ax=Dx$ 相当于条件$(-A)x=-Dx$，因此我们可以只讨论在条件 $Ax=-Dx$ 下的下确界问题而不影响定理的结论. 另一方面，下确界可能在 D 的某些对角元，比如 d_j，趋于正无穷的过程中得到，但这时由条件 $Ax=Dx$ 可知相应的 d_jx_j 趋于常数，因此有 $x_j\to 0$，进而 $x_jd_jx_j\to 0$. 就是说，在讨论 x^TDx 的下确界时，这些分量可以忽略，从而可以考虑一个低阶的(即 A 的一个主子矩阵)的相应下确界问题. 因此，不失一般性，可以假设 D 的所有对角元有界，来讨论 x^TDx 的最小

值问题. 为此设

$$L(D,x,h,\lambda)=x^TDx+h^T(Ax+Dx)+\lambda(x^Tx-1),$$

其中 $h=(h_1,\cdots,h_k)^T$. 令 $\frac{\partial L}{\partial d_j}=0,\frac{\partial L}{\partial x_j}=0,j=1,\cdots,n$, 则有

$$x_j^2+h_jx_j=(x_j+h_j)x_j=0, \tag{21}$$

$$2Dx+(A+D)h+2\lambda x=0. \tag{22}$$

注意到当 $x_j=0$ 时, 相应的 d_j 的取值对于约束条件 $Ax+Dx=0$ 及 x^TDx 的取值都无影响, 因此不妨规定, 若 $x_j=0$, 则取 $d_j=0$. 进一步还可假定 x 的前 r 个分量为 0, 其余分量均不为零(否则可进行适当的行列置换). 对 A,x,D,h 作相应分块

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{22} & A_{22}\end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix}0\\ x_2\end{bmatrix},\quad h=\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix},\quad D=\operatorname{diag}(0,D_2), \tag{23}$$

其中 x_2 的各分量非零. 从(20),(21),(22)有

$$A_{12}x_2=0, \tag{24}$$

$$A_{22}x_2+D_2x_2=0, \tag{25}$$

$$x_2+h_2=0, \tag{26}$$

$$A_{11}h_1+A_{12}h_2=0, \tag{27}$$

$$2D_2x_2+A_{21}h_1+(A_{22}+D_2)h_2+2\lambda x_2=0. \tag{28}$$

由(24),(26),(27)可得 $A_{11}h_1=0$. 因为 A 具有 β-性质, 由定理 3, A_{11} 非奇异, 从而 $h_1=0$, 结合(25), 最后可将(28)化为 $A_{22}x_2=\lambda x_2$, 就是说 (λ,x_2) 为 A 的某一主子矩阵的特征对, 而这时

$$x^TDx=x_2^TD_2x_2=-x_2^TA_{22}x_2=-\lambda=|\lambda|. \tag{29}$$

可见 $\beta\geqslant\min\{|\lambda|\,|\,\lambda$ 为 A 的任一主子矩阵的特征值$\}$, 再由引理 2 知, 上式应取等号.

参 考 文 献

[1] T. Fenner, G. Loizou, *Some New Bounds on the Condition Numbers of Optimally Scaled Matrices*, J. ACM., 21(1974), 514—524.

[2] R. Skeel, *Scaling for Numerical Stability in Gaussian Elimination*, J. ACM., 26(1979), 494—526.

[3] G. E. Forsythe, C. Moler, *Computer Solution of Linear Algebraic System*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1967.

[4] B. N. Parlett, *The Symmetric Eigenvalue Problem*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1980.

On the β-Property of Symmetric Matrices

Yin Qingxiang

(Dept. of Math., Yancheng Teachers'College, 224002)

Abstract

In this paper, we introduce a concept of the β-property of symmetric matrices which is useful in the perturbation theory for matrices. A necessary and sufficient condition for a symmetric matrix to have β-property, and the constant β, when it exists, are given.

Keywords numerical algebra, symmetric matrix.