第15卷 增刊 数学研究与评论 Vol. 15 Supp
1995年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1995

四元数体上的Marshall-Olkin不等式及改进*

杨忠鹏

(吉林师范学院数学系，吉林 132011)

摘 要 本文证明了四元数自共轭半正定矩阵乘积的一些不等式.这些结果推广、改进了复数域上的Marshall-Olkin不等式.

关键词 四元数自共轭半正定矩阵，特征值，不等式.

分类号 AMS(1991) 15A42/CCL O151.21

设 R,C,Q 分别为实数域，复数域，四元数体.用 $SC_n(F),GU_n(F)$ 分别表示 $F(=R,C,Q)$ 上的 $n\times n$ 的自共轭、酉矩阵的集合.若 $A\in F^{n\times n}$ 有且仅有 n 个实特征值，总约定其满足 $\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$.

定理1 设 $A(\geqslant 0),B(\geqslant 0)\in SC_n(Q)$，$1\leqslant t_1<\cdots<t_k\leqslant n$，则对 $k=1,2,\cdots,n$ 有

$$\sum_{s=1}^{k}\lambda_{t_s}(A)\lambda_{n-s+1}(B)\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_{t_s}(AB)\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_{t_s}(A)\lambda_s(B). \tag{1}$$

证明 当 $A(\geqslant 0),B(\geqslant 0)\in SC_n(C)$ 时，由[1]可证明(1)成立.因此 A,B,AB 的复表示矩阵 M_A,M_B,M_{AB} 也满足(1).这样从[2]所揭示的 A 与 M_A 的密切关系，即可得(1).

当 $t_s=s,s=1,2,\cdots,k$ 且 $A(\geqslant 0),B(\geqslant 0)\in SC_n(Q)$ 时，由(1)可得著名的Marshall-Olkin不等式[3].[4]指出，当 $A(\geqslant 0),B\in SC_n(C)$ 时，Marshall-Olkin不等式一般不成立.

定理2 设 $A(\geqslant 0),B\in SC_n(Q)$，$1\leqslant t_1<\cdots<t_k\leqslant n$.若 $\lambda_n(B)<0$，则对 $k=1,2,\cdots,n$ 有

$$\sum_{s=1}^{k}\lambda_{t_s}(AB)\leqslant\min\left\{\begin{array}{l}\sum_{s=1}^{k}\lambda_{t_s}(A)\lambda_s(B)+\lambda_n(B)\left[\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(A)-\sum_{s=1}^{k}\lambda_{t_s}(A)\right],\\ \sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\lambda_{t_s}(B)+\lambda_n(B)\left[\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(A)-\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\right]\end{array}\right\};$$

$$\sum_{s=1}^{k}\lambda_{t_s}(AB)\geqslant\max\left\{\begin{array}{l}\sum_{s=1}^{k}\lambda_{t_s}(A)\lambda_{n-s+1}(B)+\lambda_n(B)\left[\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)-\sum_{s=1}^{k}\lambda_{t_s}(A)\right],\\ \sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(A)\lambda_{t_s}(B)+\lambda_n(B)\left[\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)-\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(A)\right]\end{array}\right\}.$$

证明 对 $A(\geqslant 0),B-\lambda_n(B)I(\geqslant 0)$ 应用定理1，即可得定理2结论.

由此可得与(1)类似的定理2题设下的不等式

$$\sum_{s=1}^{k}\lambda_{t_s}(A)\lambda_{n-s+1}(B)+\lambda_n(B)\left[\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)-\sum_{s=1}^{k}\lambda_{t_s}(A)\right]\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_{t_s}(AB)$$

* 1993年4月17日收到.95年9月3日收到修改稿.

$$\leqslant \sum_{s=1}^{k}\lambda_{i_s}(A)\lambda_s(B)+\lambda_n(B)\Big[\sum_{s=1}^{k}\lambda_{n-s+1}(A)-\sum_{s=1}^{k}\lambda_{i_s}(A)\Big],\quad k=1,2,\cdots,n.$$

当然[4]的主要结果也可由定理 1 和 2 在四元数体上得到推广和改进.

定理 3 题设同于定理 1 且 $\lambda_{i_1}(A)\lambda_{n-t_1+1}(B)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{i_k}(A)\lambda_{n-t_k+1}(B)$. 若 m 为自然数,则

$$\sum_{s=1}^{k}\lambda_{i_s}^{m}(A)\lambda_{n-t_s+1}^{m}(B)\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_{i_s}^{m}(A)\lambda_{n-t_s+1}^{m}(B)\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_s((AB)^m),\quad k=1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

证明 由[1]可证明当 $A(\geqslant 0),B(\geqslant 0)\in SC_n(C)$ 时(2)成立. 再仿定理 1 可证明(2)在四元数体上也成立.

定理 4 题设同于定理 1 且 m 为自然数. 则 $(AB)^m$, A^mB^m 都是中心封闭阵(与实对角阵相似的矩阵)且

$$\sum_{s=1}^{k}\lambda_s^{m}(A)\lambda_{n-s+1}^{m}(B)\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_{i_s}^{m}(A)\lambda_{n-t_s+1}^{m}(B)\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_s((AB)^m)$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A^mB^m)\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_s^{m}(A)\lambda_s^{m}(B),\quad k=1,2,\cdots,n. \tag{3}$$

证明 由[2]知 $(AB)^m$, A^mB^m 都是中心封闭阵. 从排序不等式知(3)第一个不等式成立. 这样由(2)和[2, 定理 2]知(3)成立.

当 $m=1$ 时,由(3)可得改进复数域上 Marshall-Olkin 不等式

$$\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\lambda_{n-s+1}(B)\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_{i_s}(A)\lambda_{n-t_s+1}(B)\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(AB)\leqslant\sum_{s=1}^{k}\lambda_s(A)\lambda_s(B),\quad k=1,2,\cdots,n,$$

其中 $A(\geqslant 0),B(\geqslant 0)\in SC_n(Q)$, $1\leqslant t_1<\cdots<t_k\leqslant n$.

在(3)中取 $k=n$ 时,可得 Bushell-Trustrum 不等式[5]在四元数体上的推广形式:

$$\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^{m}(A)\lambda_{n-s+1}^{m}(B)\leqslant \mathrm{Re}\ \mathrm{tr}(AB)^m=\mathrm{tr}(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^m$$

$$\leqslant\mathrm{tr}(A^{\frac{m}{2}}B^mA^{\frac{m}{2}})=\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}(A^mB^m)\leqslant\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^{m}(A)\lambda_s^{m}(B), \tag{4}$$

其中 $(A\geqslant 0),B(\geqslant 0)\in SC_n(Q)$.

得到(4)的方法与[5]是不同的. 应用本文的方法和结论可对由[5]的方法不宜确定的问题给出清晰准确的回答.

推论 设 $A(\geqslant 0),B(\geqslant 0)\in SC_n(C)$, m 为自然数. 则

1) $\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^{m}(A)\lambda_s^{m}(B)$, $\sum_{s=1}^{n}\lambda_s^{m}(A)\lambda_{n-s+1}^{m}(B)$ 分别是 $GU_n(C)$ 到 R 的连续映射 $U\to\mathrm{tr}(AUBU^*)^m$ 的最大值,最小值.

2) 存在 $X\in GU_n(C)$ 使得 X^*AX, X^*B^+X, X^*B_+X 同时为对角阵,其中 U 取 U^+, $U_+\in GU_n(C)$ 时使 $\mathrm{tr}(AUBU^*)^m$ 取得最大值,最小值,此时 $B^+=U^+BU^{+*}$, $B_+=U_+BU_+^*$.

参 考 文 献

[1] Wang Boying and Zhang Fuzhen, Linear Algebra Appl., 160(1992), 113—118.

[2] 杨忠鹏, 新疆大学学报(自), 10:3(1993), 46—50.

[3] A. W. Marshall and I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Acadmic Press, New York, 1979.

[4] N. Komaroff, Linear Algebra Appl., 140(1990), 155-161.

[5] P. J. Bushell and G. B. Trustrum, Linear Algebra Appl., 132(1990), 173—178.

The Marshall-Olkin's Inequality over the Quaternion Field and Its Improvement

Yang Zhongpeng

(Dept. of Math., Jilin Teachers'College, Jilin 132011)

Abstract

Some inequalities involving product of self-conjugate semi-positive definite quaternion matrices are proved. These results generalize and improve the Marshall-Olkin's inequality over complex field.

Keywords self-conjugate semi-positive definite quaternion matrix, pigenvalue, inequality.