第15卷 增刊
1995年11月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 15 Supp
Nov. 1995

弱 S-闭空间*

张 广 济

(大连大学师范学院，大连 116035)

摘 要 本文从强半开集出发，定义了弱 S-闭空间，并讨论了它的某些特征.

关键词 强半开集，弱 S-闭空间.

分类号 AMS(1991) 54A05/CCL O189.1

定义 1 设 X 是一个拓扑空间，$A\subset X$，称 A 为 X 的强半开集，若存在 X 的开集 U，使得 $U\subset A\subset U^{-0}$.

显然有，开集⇒强半开集⇒半开集，但可举例说明它们的逆是不真的.

定理 1 设 $A\subset X$，则下列条件等价

(1) A 为 X 的强半开集.

(2) 存在 X 的正则开集 Q 与无处稠密集 N，使得 $A=Q\backslash N$.

(3) 存在 X 的开集 U 及无处稠密集 N，$A=U\backslash N$.

(4) $A\subset A^{0-0}$.

定义 2 称拓扑空间 X 为弱 S-闭的，若从 X 的每个强半开复盖中都可选出有限子族，它们的包构成 X 的复盖.

明显 S-闭空间⇒弱 S-闭空间，但反之不成立.

例 设 $X=[0,1]$，$\mathscr{T}=\{U\mid 1\overline{\in}U\}\cup\{U\mid 1\in U$，且 $X\backslash U$ 为有限集$\}$.

不难验证$(X,\mathscr{T})$是紧的，且$\forall\ U\in\mathscr{T}$ 当且仅当 U 为 X 的强半开集，故而是弱 S-闭的. 但$(X,\mathscr{T})$不是 S-闭的. 事实上取 X 的如下正则闭复盖：$\mathscr{B}=\{B\mid 1\in B$，并且 B 是可数无限集$\}$. $B\in\mathscr{B}$是正则闭集，因有开集 $B\backslash\{1\}$使 $B=(B\backslash\{1\})^-$，但 $\mathscr{B}$ 中没有有限子族复盖 X，因为 $\mathscr{B}$ 中任何有限子族至多复盖 X 的可数个点，故不能构成 X 的复盖.

定理 2 极不连通的弱 S-闭空间是 S-闭空间.

定理 3 下述条件是等价的.

(1) 拓扑空间 X 是弱 S-闭的.

(2) X 的每一强半开复盖都可选出有限加细半开集族，它们的包复盖 X.

(3) X 的每一强半开复盖都可选出有限加细开集族，它们的包复盖 X.

定理 4 Hausdorff 空间 X 是弱 S-闭的充要条件是 X 是 H-闭空间.

推论 1 紧空间是弱 S-闭的.

* 1993年8月13日收到.

设 $M \subset X$，M 的 θ-闭包 $\mathrm{cl}_\theta M=\{x \mid x$ 的每个闭邻域与 M 的交不空$\}$.

定理 5 设 X 是 Hausdorff 空间，则下述条件是等价的.

(1) X 是弱 S-闭的.

(2) X 的每个滤子 $\mathscr{F}$，有 $\bigcap_\alpha\{\mathrm{cl}_\theta F_\alpha \mid F_\alpha \in \mathscr{F}\} \neq \varnothing$.

(3) X 的每一开滤子 $\mathscr{F}$，有 $\bigcap_\alpha\{\mathrm{cl}_\theta u_\alpha \mid u_\alpha \in \mathscr{F}\} \neq \varnothing$.

(4) X 的每一开滤子都有接触点.

定理 6 正则空间 X 是弱 S-闭的必须且只须 X 是紧空间.

文[2]中命题 2 指出，$(X,\mathscr{T})$ 中开集在 $(X,\mathscr{T})$ 中和在它的半正则化空间 $(X,\mathscr{T}_*)$ 中的包相同. 对称的有 $(X,\mathscr{T})$ 中闭集在 $(X,\mathscr{T})$ 和在 $(X,\mathscr{T}_*)$ 中内部相同. 由此可证若 A 为 $(X,\mathscr{T}_*)$ 中强半开集则 A 必为 $(X,\mathscr{T})$ 中强半开集.

定理 7 拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 是弱 S-闭的当且仅当它的半正则化 $(X,\mathscr{T}_*)$ 是弱 S-闭的.

设 X 是拓扑空间，$A \subset X$. 若 A 作为 X 的子空间是弱 S-闭的，则称 A 为 X 的弱 S-集.

Cameron 曾证明，若空间 X 可以表成有限个 S-闭的即开又闭子集的并，则 X 是 S-闭的. 对于弱 S-闭空间，我们有

定理 8 设 $\mathscr{Y}=\{Y_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$ 是空间 X 的有限复盖，并设 $\forall\, i$，Y_i 是 X 中开弱 S-集，则 X 是弱 S-闭的.

推论 2 若空间 X 可以表成为有限个开弱 S-集的并，则 X 是弱 S-闭空间.

定义 3 设 $f: X \to Y$ 是从空间 X 到空间 Y 中的映射，若对 Y 中每一开集 U，$f^{-1}(U)$ 是 X 中强半开集，则称 f 为强半连续映射.

显然，连续映射⇒强半连续映射⇒半连续映射.

引理 1 设 $f: X \to Y$ 是强半连续映射，则对 Y 中任一开集 U，有 $[f^{-1}(U)]^- \subset f^{-1}(U^-)$.

由引理 1，可以证明

定理 9 设 X 是弱 S-闭空间，$f: X \to Y$ 是 X 到 Y 上的强半连续映射，则 Y 是弱 S-闭的.

定理 10 设 $f: X \to Y$ 是从弱 S-闭空间 X 到 Hausdoff 空间 Y 中的强半连续映射，则 $f(X)$ 是 Y 中的闭集.

定理 11 弱 S-闭性既是拓扑性质也是半拓扑性质.

参 考 文 献

[1] T. Thompson, *S-closed spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 60(1976), 335—338.

[2] 王国俊，S-闭空间的性质，数学学报，24(1981)，55—63.

On Weakly S-Closed Spaces

Zhang Guangji

(Dalian University, 116035)

Abstract

In this paper, we define the concept of weakly s-closed spaces characterized in terms of strongly semi-open sets and obtain some of its properties.

Keywords strongly semi-open sets, weakly s-closed spaces.