再论切点单形的不等式*

苏化明　　田文平
(合肥工业大学数学力学系, 230009)　(南京审计学院基础部, 210029)

关键词　单形,切点单形,中线长,高线长.
分类号　AMS(1991) 51K/CCL O184

§1　主要结论

在 n 维欧氏空间 $E^n(n\geq 2)$ 中,设 n 维单形 $\mathscr{A}$ 的顶点为 A_i,$\mathscr{A}$ 的内切球和各侧面的切点设为 $A_i'(i=1,2,\cdots,n+1)$,则称以 A_i' 为顶点的单形 $\mathscr{A}'$ 为单形 $\mathscr{A}$ 的切点单形.

作者在[1]中对切点单形的有关性质进行了讨论,作为文[1]的续篇,本文将进一步给出单形与其切点单形关于中线长,高线长等不变量之间的关系.

若从 n 维单形 $\mathscr{A}(\mathscr{A}')$ 的 $n+1$ 个顶点中任取 $k+1(n\geq k\geq 2)$ 个顶点,则可组成 $\mu=\binom{n+1}{k+1}$ 个子单形,这些 k 维单形的中线长(单形的任一顶点与其所对侧面重心的连结线段长)和高线长分别记为 $m_i^{(k)}(m_i'^{(k)})$ 和 $h_i^{(k)}(h_i'^{(k)})[k=2,3,\cdots,n,i=1,2,\cdots,\mu(k+1)]$. 令 $(m_i^{(k)})^\theta$, $(m_i'^{(k)})^\theta$ 的 λ 次初等对称多项式为 P_λ,P_λ', $(h_i^{(k)})^\theta$, $(h_i'^{(k)})^\theta$ 的 λ 次初等对称多项式为 Q_λ,Q_λ',其中 $0<\theta\leq 2$ 为常数,则有

定理 1　n 维单形 $\mathscr{A}$ 和它的切点单形 $\mathscr{A}'$ 的不变量 P_λ 与 P_λ',Q_λ 与 Q_λ' 之间有不等式

$$P_\lambda'\leq n^{-\lambda\theta}P_\lambda,\quad Q_\lambda'\leq n^{-\lambda\theta}Q_\lambda,$$

且两式中等号当且仅当 $\mathscr{A}$ 为正则单形时成立.

设 n 维单形 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 的切点单形分别为 $\mathscr{A}',\mathscr{B}'$,若从 $\mathscr{A}(\mathscr{A}')$,$\mathscr{B}(\mathscr{B}')$ 的 $n+1$ 个顶点中任取 $k+1(n\geq k\geq 2)$ 个顶点,则可组成 $\mu=\binom{n+1}{k+1}$ 个子单形,这些 k 维子单形的中线长和高线长分别记为 $m_i^{(k)}(m_i'^{(k)})$,$M_i^{(k)}(M_i'^{(k)})$ 和 $h_i^{(k)}(h_i'^{(k)})$,$H_i^{(k)}(H_i'^{(k)})[k=2,3,\cdots,n,i=1,2,\cdots,\mu(k+1)]$,则有

定理 2　n 维单形 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 和它们的切点单形 $\mathscr{A}',\mathscr{B}'$ 之间有不等式

$$\sum_{i=1}^{\mu(k+1)}m_i'^{(k)}M_i'^{(k)}\leq n^{-2}\sum_{i=1}^{\mu(k+1)}m_i^{(k)}M_i^{(k)},\quad \sum_{i=1}^{\mu(k+1)}h_i'^{(k)}H_i'^{(k)}\leq n^{-2}\sum_{i=1}^{\mu(k+1)}h_i^{(k)}H_i^{(k)},$$

且两式中等号当且仅当 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 均为正则单形时成立.

* 1992年12月15日收到.

§2 几个引理

为证明§1的两个定理,需要如下几个引理.

引理 1[2] n 维单形 $\mathscr{A}$ 的棱长 a_{ij}和外接球半径 R 之间有不等式

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} a_{ij}^2 \leqslant (n+1)^2R^2,$$

其中等号当且仅当 $\mathscr{A}$ 的重心和外接球球心重合时成立.

引理 2 n 维单形 $\mathscr{A}$ 的高线长 h_i 和内切球半径 r 之间有不等式

$$\prod_{i=1}^{n+1} h_i \geqslant (n+1)^{n+1}r^{n+1},$$

其中等号当且仅当单形 $\mathscr{A}$ 的各侧面面积相等时成立.

引理 3[3] 设 n 维单形 $\mathscr{A}$ 的任意两个侧面 f_i,f_j 所成的内二面角为

$$f_i\hat{}f_j=\theta_{ij}=\theta_{ji}\quad (1\leqslant i<j\leqslant n+1),$$

则有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\sin^2\theta_{ij}\leqslant\frac{n-1}{2n}(n+1)^2,\qquad \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\sin^2\theta_{ij}\leqslant\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}n(n+1)},$$

且两式中等号当且仅当 $\mathscr{A}$ 为正则单形时成立.

引理 4 设 $\mathfrak{S}_N=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}$为 $E^n(N>n\geqslant 2)$中的一个有限点集,从 $\mathfrak{S}_N$ 中任取 $k+1$ $(n\geqslant k\geqslant 2)$个点,以它们为顶点作一个 k 维单形,把所有这些单形高线长的乘积记为 D_k,则有

$$\sqrt{\frac{k}{k+1}}D_k^{\frac{1}{(k+1)\binom{N}{k+1}}}\geqslant\sqrt{\frac{l}{l+1}}D_l^{\frac{1}{(l+1)\binom{N}{l+1}}}\quad(2\leqslant k<l\leqslant n),$$

其中等号当且仅当所有的 l 维单形均为正则单形时成立.

引理 5 设 $\mathfrak{S}_N=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}$是 $E^n(N>n\geqslant 2)$中的一个有限点集,从 $\mathfrak{S}_N$ 中任取 $k+1$ $(n\geqslant k\geqslant 2)$个点,以它们为顶点作一个 k 维单形,把所有这些单形中线长的平方和记为 M,而 $\overline{A_iA_j}=a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,N,i\neq j)$,则有

$$M=\frac{k+1}{k^2}\binom{N-2}{k-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}a_{ij}^2.$$

引理 6 n 维单形正则的充分必要条件是它的 $n+1$ 条中线长 m_i 与其对应的高线长 $h_i(i=1,2,\cdots,n+1)$相等.

参 考 文 献

[1] 苏化明,关于切点单形的两个不等式,数学研究与评论,10(1990),243—246.

[2] R. Alexander and K. B. Stolarsky, Trans. Amer. Math. Soc., 193(1974), 1—31.

[3] 苏化明,关于单形的三角不等式,数学研究与评论,13(1993),599—604.

[4] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and Pólya, Inequalities, Cambridge, 2nd, ed., 1952.

[5] Arun Sanyal, Amer. Math. Monthly, 74(1967), 697—698.

[6] Advanced Problems 3656, Amer. Math. Monthly, 42(1935), 183—185.