第15卷 增刊 数学研究与评论 Vol. 15 Supp
1995年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1995

有限布尔代数上的置换矩阵*

陈春光　　　柴国兴
（辽宁大学计算机科学技术系）（辽宁大学经济管理学院）

摘　要　本文研究了任意有限布尔代数上的置换矩阵的特征，根据此特征可构造各种类型的置换矩阵，并给出了 n 阶置换矩阵个数的计数公式，然后证明了 n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件是 A 为 n 阶置换矩阵.

关键词　布尔代数，置换矩阵，群，原子，最大元，最小元，逆矩阵.

分类号　AMS(1991) 08B05/CCL O153.2

设 $\langle L,+,\cdot\rangle$ 为具有 $2^m(m\geqslant 1)$ 个元素的任意有限布尔代数，其 m 个原子分别为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m$，最大元为 1，最小元为 0. 显然有：$a_1+a_2+\cdots+a_m=1$.

约定 L 上的矩阵运算如下：

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，则 $A+B=(c_{ij})_{m\times n}$，其中 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times r}$，则 $AB=(c_{ij})_{m\times r}$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$.

设 P 为 L 上的 n 阶置换矩阵，由置换矩阵定义，$PP^T=P^TP=I$，不难得到：

1. 互换置换矩阵的两行（或列）所得矩阵仍是置换矩阵.

2. 两个置换矩阵之积仍是置换矩阵，每个置换矩阵均可逆，其逆就是它的转置矩阵. 这样，L 上的所有 n 阶置换矩阵在矩阵乘法下构成一个群.

3. P 为 L 上的 n 阶置换矩阵的充分必要条件是每行（列）元素之和为 1，且任意两个不同行（列）对应元素之积的和为 0.

考察置换矩阵的任意一个行向量 $(P_{i1},P_{i2},\cdots,P_{in})$，将其中的非 0 元素分解成原子的和时，由上得，此行所有非 0 元素的分解式总共所涉及到的原子恰好为所有原子（这保证此行分量之和为 1）且没有重复（可保证此行不同分量之积为 0）. 那么，所有 n 阶置换矩阵的所有不同行向量有多少呢？其个数恰好相当于如下球盒模型的计数问题：

把 m 个不同球（分别代表 m 个不同的原子），放到 n 个不同的盒子（代表行向量的 n 个分量）里，允许空盒（空盒代表该分量为 0），则放球的方法是：$n^m=\binom{n}{1}\left\{ {m \atop 1} \right\}\cdot 1!+\binom{n}{2}\left\{ {m \atop 2} \right\}\cdot 2!+\cdots+\binom{n}{n}\left\{ {m \atop n} \right\}\cdot n!$，其中 $\left\{ {m \atop i} \right\}$ 为第二类 stirling 数[1].

定理 1　L 上的全体 n 阶置换矩阵共有 n^m 个不同的行向量，此结论对列亦成.

应当指出，置换矩阵的行向量的分量次序任意排列，所得的行向量仍为置换矩阵的行向

* 1994年4月20日收到. 95年9月18日收到修改稿.

量. 因此，如果把可以通过分量的对换而得到的行向量算作一类，即只考虑行所含元素的集合而不考虑其元素次序，那么不难得到：

推论 L 上的所有 n 阶置换矩阵的行向量共有$\left\{\begin{matrix}m\\1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}m\\2\end{matrix}\right\}+\cdots+\left\{\begin{matrix}m\\n\end{matrix}\right\}$类.

根据上述结论，从 m 个原子出发，不难构造出 n^m 个不同行向量，从中适当选取 n 个行向量组成的 n 阶方阵只要保证其每个列向量的所有非 0 分量的原子表达式总共所涉及到的原子恰为全休原子且没有重复，则这个矩阵就是置换矩阵. 这就是构造置换矩阵的方法. 至于，总共可构造多少个置换矩阵呢？我们有，

定理 2 L 上的 n 阶置换矩阵总共有 $(n!)^m$ 个.

证明 此问题相当于如下球盒模型的计数问题：设想把 n 阶置换矩阵中 n^2 个元素位置放置不同标号的盒，每个原子代表一个球，现有 n 个 a_1 球，n 个 a_2 球，…，n 个 a_m 球，往盒里放，每行每列盒里放且只放一个 a_1 球，一个 a_2 球，…，一个 a_m 球，允许空盒，其放法数恰为 n 阶不同置换矩阵个数. 显然，这种放法数为 $(n!)^m=(n)^m(n-1)^m\cdots 2^m\cdot 1^m$.

关于置换矩阵与可逆矩阵的关系有：

定理 3 布尔代数 L 上的 n 阶矩阵 A 为可逆矩阵当且仅当 A 为置换矩阵.

证明 充分性显然.

必要性 设 $A=(a_{ij})_n$ 是可逆的，$B=(b_{ij})_n$ 为 A 的逆，则由 $AB=I$ 得：

$$a_{i1}b_{1i}+a_{i2}b_{2i}+\cdots+a_{in}b_{ni}=1.$$

由此得$\begin{cases}a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}=1\\ b_{1i}+b_{2i}+\cdots+b_{ni}=1\end{cases}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，同理得$\begin{cases}a_{1i}+a_{2i}+\cdots+a_{ni}=1\\ b_{i1}+b_{i2}+\cdots+b_{in}=1\end{cases}$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

又因当 $r\neq t$ 时，AB 的第 r 行第 t 列处元素为 0，即 $a_{r1}b_{1t}+a_{r2}b_{2t}+\cdots+a_{rn}b_{nt}=0$，所以 $a_{r1}b_{1t}=a_{r2}b_{2t}=\cdots=a_{rn}b_{nt}=0$. 即对任意 $k\neq i$，恒有 $a_{ij}b_{jk}=0$. 所以

$$a_{ij}(b_{j1}+b_{j2}+\cdots+b_{j,i-1}+b_{ji}+b_{j,i+1}+\cdots+b_{jn})=a_{ij}b_{ji},\quad (i,j=1,2,\cdots,n).$$

同理，由 $BA=I$ 得，$b_{ji}(a_{i1}+\cdots+a_{ij}+\cdots+a_{in})=b_{ji}a_{ij}$. 即 $b_{ji}=b_{ji}a_{ij}$，所以 $a_{ij}=b_{ji}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$，故 A 与 B 互为转置，且 $AA^T=A^TA=I$，即 A 为置换矩阵.

推论 L 上的 n 阶可逆矩阵共有 $(n!)^m$ 个.

参 考 文 献

[1] 屈婉玲，组合数学，北京大学出版社，140(1989).

[2] Ki Hang Kin, *Boolean matrix theory and appications*, Marcel Dekker. Inc, New York and Basel, 10(1982).

[3] R.L. 古德斯坦因著，刘文、李忠滨译，布尔代数，科学出版社，119(1978).