第16卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 16 No. 1
1996年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1996

Oppenheim不等式推广的简单证明*

陈　计　　　　王　振
（宁波大学数学系，315020）　（中国科学院武汉数理研究所，430071）

摘　要　设Euclid空间$n+1$元点集A,B及其度量和C所构成的单形的体积、外接球半径分别为V_1,V_2,V和R_1,R_2,R. 本文给出不等式$V^{2/n}\geqslant V_1^{2/n}+V_2^{2/n}$,$R^2\geqslant R_1^2+R_2^2$一种简单的证法. 该证法同样适用于关于圆内接凸$n$边形的Oppenheim不等式.

关键词　度量和,多边形,单形,面积,体积,半径.

分类号　AMS(1991) 51M16/CCL O186.5

§1　引　言

A. Oppenheim曾建立了如下的结果[1],[2]：设$\triangle A_iB_iC_i$的边长，面积，外接圆半径分别为$a_i,b_i,c_i,\Delta_i,R_i,i=1,2$. 则以$\sqrt{a_1^2+a_2^2}=a,\sqrt{b_1^2+b_2^2}=b,\sqrt{c_1^2+c_2^2}=c$为边长的$\triangle ABC$的面积$\Delta$与外接圆半径$R$分别满足

$$\Delta\geqslant\Delta_1+\Delta_2 \tag{1}$$

和

$$R^2\leqslant R_1^2+R_2^2. \tag{2}$$

1974年，Oppenheim[2]将(1)推广到圆内接凸n边形；1981年，杨路与张景中[3],[4]把(1)和(2)推广到n维空间的单形.

本文将分别给出上述三个推广的简单证明.

§2　不等式(1)的多边形推广

引理1[5]　设平面凸n边形$A_1A_2\cdots A_n$的面积为F，各边长$A_1A_2=a_1,A_2A_3=a_2,\cdots,A_nA_1=a_n$；再设实数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in(0,\pi)$，且$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\pi$，则

$$a_1^2\operatorname{ctg}\alpha_1+a_2^2\operatorname{ctg}\alpha_2+\cdots+a_n^2\operatorname{ctg}\alpha_n\geqslant 4F, \tag{3}$$

等号成立当且仅当此n边形内接于圆，且

$$\frac{a_1}{\sin\alpha_1}=\frac{a_2}{\sin\alpha_2}=\cdots=\frac{a_n}{\sin\alpha_n}=2R,$$

其中R为圆半径.

定理1[2]　设$a_1,a_2,\cdots,a_n,F_1$和$b_1,b_2,\cdots,b_n,F_2$分别是凸n边形$A_1A_2\cdots A_n$和$B_1B_2\cdots B_n$的边长和面积. 则以$\sqrt{a_1^2+b_1^2}=c_1,\sqrt{a_2^2+b_2^2}=c_2,\cdots,\sqrt{a_n^2+b_n^2}=c_n$为边长的圆内接$n$边形$C_1C_2$

* 1993年5月4日收到.

$\cdots C_n$ 的面积 F 满足不等式

$$F \geqslant F_1 + F_2, \tag{4}$$

等号成立当且仅当 $A_1A_2\cdots A_n$ 和 $B_1B_2\cdots B_n$ 是相似的圆内接凸 n 边形.

证明 将不等式(3)分别用于凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和 $B_1B_2\cdots B_n$，得

$$a_1^2\operatorname{ctg}\alpha_1 + a_2^2\operatorname{ctg}\alpha_2 + \cdots + a_n^2\operatorname{ctg}\alpha_n \geqslant 4F_1,$$

$$b_1^2\operatorname{ctg}\alpha_1 + b_2^2\operatorname{ctg}\alpha_2 + \cdots + b_n^2\operatorname{ctg}\alpha_n \geqslant 4F_2.$$

现将上面两式的两边分别相加得

$$c_1^2\operatorname{ctg}\alpha_1 + c_2^2\operatorname{ctg}\alpha_2 + \cdots + c_n^2\operatorname{ctg}\alpha_n \geqslant 4(F_1 + F_2); \tag{5}$$

再令 $\sin\alpha_i = c_i/(2R)$，$i=1,2,\cdots,n$，其中 R 为凸 n 边形 $C_1C_2\cdots C_n$ 的外接圆半径，则(5)的左边 $=4F$，所以 $F \geqslant F_1 + F_2$，等号成立当且仅当 $A_1A_2\cdots A_n$ 与 $B_1B_2\cdots B_n$ 为相似的圆内接凸 n 边形.

§3 不等式(1)的高维推广

引理 2[6] 若 B，C 是 n 维单形，$V(B)$，$V(C)$ 分别表示 B，C 的体积. 设 A 的顶点是 $A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$；$B$ 的顶点是 $B_1, B_2, \cdots, B_{n+1}$，且 $b_{ij} = |\overline{B_iB_j}|$，$c_{ij} = |\overline{C_iC_j}|$. 用 S_i 来表示 $(C_1, C_2, \cdots, C_{n+1})/C_i$ 所成的 $n-1$ 维单形的面积，θ_{ij} 表示 S_i 与 S_j 的夹角，则有不等式

$$\sum_{i<j} b_{ij}^2 S_i S_j \cos\theta_{ij} \geqslant n^3 V(B)^{\frac{2}{n}} V(C)^{2-\frac{2}{n}}, \tag{6}$$

等号成立当且仅当两个单形对应相似.

定理 2[3] 设 n 维单形 A 与 B 的棱长及体积分别为 a_{ij}，$V(A)$ 与 b_{ij}，$V(B)$，$1 \leqslant i < j \leqslant n+1$. 则以 $\sqrt{a_{ij}^2 + b_{ij}^2} = c_{ij}$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n+1)$ 为棱长的 n 维单形 $C_1C_2\cdots C_{n+1}$ 的体积 $V(C)$ 满足不等式

$$V(C)^{\frac{2}{n}} \geqslant V(A)^{\frac{2}{n}} + V(B)^{\frac{2}{n}}, \tag{7}$$

等号成立当且仅当单形 A 与 B 对应相似.

证明 将单形 A 代替引理 2 中的 B，得

$$\sum_{i<j} a_{ij}^2 S_i S_j \cos\theta_{ij} \geqslant n^3 V(A)^{\frac{2}{n}} V(C)^{2-\frac{2}{n}}. \tag{8}$$

将(8)与(6)相加得

$$n^3 V(C)^{2-\frac{2}{n}} [V(A)^{\frac{2}{n}} + V(B)^{\frac{2}{n}}] \leqslant \sum_{i<j} c_{ij}^2 S_i S_j \cos\theta_{ij} = n^3 V(C)^2, \tag{9}$$

两边同除 $n^3 V(C)^{2-\frac{2}{n}}$ 即得

$$V(A)^{\frac{2}{n}} + V(B)^{\frac{2}{n}} \leqslant V(C)^{\frac{2}{n}},$$

等号成立当且仅当 $A \backsim C$ 且 $B \backsim C$，即 $A \backsim B$.

§4 不等式(2)的高维推广

引理 3[7] 设 n 维单形 P 的外接球半径及棱长分别为 R 和 ρ_{ij} $(1 \leqslant i < j \leqslant n+1)$. 则对满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1$ 的实数 λ_i $(i = 1, 2, \cdots, n+1)$ 有

$$R^2 = \max_{\Sigma\lambda_i = 1} \Big(\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j \rho_{ij}^2 \Big), \tag{10}$$

定理 3[4] 设三个 n 维单形 A,B,C 的定义同定理 2,用 R_1,R_2,R 分别表示它们外接球的半径. 则有

$$R^2 \leqslant R_1^2 + R_2^2. \tag{11}$$

证明 将(10)分别用于单形 A 和 B,得

$$R_1^2 \geqslant \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j a_{ij}^2, \quad R_2^2 \geqslant \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j b_{ij}^2,$$

两式相加得

$$R_1^2 + R_2^2 \geqslant \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j (a_{ij}^2 + b_{ij}^2) = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j c_{ij}^2. \tag{12}$$

所以 $R_1^2 + R_2^2 \geqslant \max\limits_{\Sigma\lambda_i=1} \left(\sum\limits_{i<j} \lambda_i \lambda_j c_{ij}^2 \right) = R^2$. 证毕.

参 考 文 献

[1] A. Oppenheim, *Problem* 5092, Amer. Math. Monthly, 70(1963), 444 and 71(1964), 444.

[2] A. Oppenheim, *Inequalities involving elements of triangles, quadrilaterals or tetrahedra*, Univ. Beggrad. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Fiz., No. 461—497(1974), 257—263.

[3] 杨路、张景中, 关于 Alexander 的一个猜想, 科学通报, 1(1981), 1—3.

[4] 杨路、张景中, 高维度量几何的两个不等式, 成都科技大学学报, 4(1981), 63—70.

[5] 杨学枝, 问题 43 的评注(Ⅳ), 数学通讯, 6(1991), 41.

[6] 杨路、张景中, Neuberg-Pedoe 不等式的高维推广及其应用, 数学学报, 3(1981), 401—412.

[7] M.S. Klankin, *An identity for simplexes and related inequalities*, Simon Stevin, 48(1974—1975), 57—64.

Simple Proofs of the Generalized Oppenheim Inequalities

Chen Ji

(Dept. of Appl. Math., Ningbo Univ., Ningbo 315211)

Wang Zhen

(Inst. of Math. & Phy. Sci., Academia Sinica, Wuhan 430071)

Abstract

Suppose $A = \{A_1, \cdots, A_{n+1}\}$ consists of the vertices of one simplex and $B = \{B_1, \cdots, B_{n+1}\}$ consists another. $A + B$ denotes a point set $C = \{C_1, \cdots, C_{n+1}\}$ such that

$$|C_i - C_j|^2 = |A_i - A_j|^2 + |B_i - B_j|^2, \quad i,j = 1, \cdots, n+1.$$

Let V_1, V_2, V and R_1, R_2, R be the volumes and radic of the cirumscribed spheres of A, B, C respectively. Simple proofs are given on the following inequalities due to Yang and Zhang:

$$V^{2/n} \geqslant V_1^{2/n} + V_2^{2/n}, \quad R^2 \leqslant R_1^2 + R_2^2$$

A related inequality for polygons is also proved.

Keywords metric sum, polygon, simplex, area, volume, radius.