第16卷第1期
1996年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 16 No. 1
Feb. 1996

内网点连通剖分下网线的编号*

漆 涛 王仁宏

(大连理工大学数学科学研究所，116024)

摘 要 本文讨论内网点连通剖分下网线的编号方法，以使协调方程的带宽尽量的小. 这样对解协调方程，进而确定给定剖分下的样条函数空间是有意义的. 文中给出一个随机选取的剖分的网线的一个具体编号. 对矩形剖分、I 型与 II 型三角剖分，给出了它们的带宽分析.

关键词 连通剖分，协调方程，内网点，样条函数.

分类号 AMS(1991) 65D17/CCL O241.5

§1 引 言

给定平面 R^2 中的一个单连通区域 D，用有限条代数曲线对 $\overline{D}$ 进行剖分 T(见图 1). 于是 $\overline{D}$ 被剖分 T 分成有限个子区域，把每一个这样的子区域称为 $\overline{D}$ 在剖分 T 下的"胞腔"，形成每个胞腔的边界的那些线段称之为"网线"，网线的交点称为网点. 根据多元样条的理论[1]，D 在剖分 T 下的二元样条函数如果存在的话，则在每条内网线上必有光滑余因子存在. 反之，如果在每根内网线上均有光滑余因子，且这些光滑余因子满足所谓的总体协调方程，则必存在一个 D 在剖分 T 下的样条函数. 对一些特殊的区域和特殊的剖分，如 I 型与 II 型三角剖分，已有许多方法来确定其上的样条函数. 而对于一般的剖分，还没有有效的方法来确定其样条函数. 根据[1]中的理论，可以通过解总体协调方程来达到此目的. 但是由于总体协调方程的未知数较多，给解总体协调方程带来一些困难 1. 但当内网点较多时，不难发现，总体协调方程对应的矩阵是稀疏的. 本文提出对内网线编号的一种方法，使每个内网点上的协调方程具有小的带宽，这样可以更为有效地解总体协调方程.

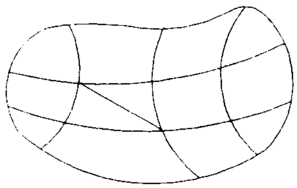

图 1

§2 剖分的形式定义

为了讨论方便，需要给出 D 上剖分的一个严格定义. 选择类似与图论的方法，设 D 为 R^2 中一个单连通区域，D 上的剖分 T 是指给出了一个网点的集合 $V(T)$ 与网线的集合 $\Gamma(T)$. $V(T)$

* 1993年12月15日收到.

中的元素为 R^2 中的点. 而 $\Gamma(T)$ 中的元素为 $\overline{D}$ 中的一曲线段. $\overline{D}$ 中的一曲线段是指一个[0,1]到 $\overline{D}$ 中的一个连续映射. 设 $\gamma:[0,1]\to\overline{D}$ 为 $\overline{D}$ 中的一曲线段. 称 $\gamma(0)$ 与 $\gamma(1)$ 为线段 γ 的端点, 称 $\mathrm{int}(\gamma):=\gamma(0,1)=\{\gamma(t):t\in(0,1)\}$ 为 γ 的内部. 这样, 我们可以严格的定义剖分如下:

给定平面上一个单连通区域 D, D 的一个剖分 $T(D)=\{V(T),\Gamma(T)\}$ 满足:

1. $V(T),\Gamma(P)$ 均为有限集;
2. $V(T)\subset\overline{D}, V(T)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma(T)}\{\gamma(0),\gamma(1)\}$;
3. $\forall\gamma\in\Gamma(T)$ 为 $\overline{D}$ 中的一曲线段, 且满足:
   3.1 γ 在 $(0,1]$ 上与 $[0,1)$ 上均不自交;
   3.2 $\gamma(0)\in V(T),\gamma(1)\in V(T)$;
   3.3 $\mathrm{int}(\gamma)\cap V(T)=\varnothing, \mathrm{int}(\gamma)\cap\partial D=\varnothing$;
   3.4 $(\forall\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma(T))\mathrm{int}(\gamma_1)\cap\mathrm{int}(\gamma_2)=\varnothing$.

§3 内网点连通的剖分

设给定平面单连通区域 D 的一个剖分 $T(D)=V(T),\Gamma(T))$. 定义 $V^0:=V(T)\backslash\partial D$. $\forall p\in V^0$ 被称为内网点. $\forall p\in V(T)\cap\partial D$ 被称为边界网点. 对任意的 $p\in V^0$, 定义 $\Gamma(p):=\{\gamma\in\Gamma(T):\gamma$ 至少有一个端点为 $p\}$, 对 $\forall P\subset V^0$, 定义 $\Gamma(P):=U\{\Gamma(p):p\in P\}$. $\forall\gamma\in\Gamma(V^0)$ 被称为连内网点, 简记 $\Gamma^0:=\Gamma(V^0)$.

$a\in V^0, b\in V^0(a\neq b)$, 被称为相邻的, 如果存在 $\gamma\in\Gamma^0$ 使 γ 的两个端点分别为 a 与 b.

$\{a_0,\cdots,a_n\}\subset V^0$ 被称为是一个道路, 如果 $(\forall i=0,\cdots,n-1)a_i$ 与 a_{i+1} 为相邻的, n 被称为此道路的长度, 记为 $n:L(a_0,\cdots,a_n)$.

$a\in V^0, b\in V^0(a\neq b)$ 被称为是连通的, 如果存在如下的一个道路: $\{a,a_1,\cdots,a_n,b\}$. 如果 a 与 b 是连通的, 定义 a 与 b 的距离为 $d(a,b):=\min\{L(a,a_1,\cdots,a_n,b):(a,a_1,\cdots,a_n,b)$ 为一道路$\}$.

称 $P\subset V^0$ 为连通的, 如果 $\forall a\in P, \forall b\in P(a\neq b)$ 均为连通的. 如果 V^0 为连通的, 则称剖分 T 为内网点连通的剖分. 此时简称剖分 T 为连通的.

§4 带宽的定义

对于一个给定的剖分 T. 记 $m:=\overline{\overline{\Gamma^0}}$, 其中 $\overline{\overline{\Gamma^0}}$ 表示 Γ^0 的元素个数. 将 Γ^0 从 1 到 m 编号, 则 $\Gamma^0=\{\gamma_1,\cdots,\gamma_m\}$. 在样条函数理论中, 诸 γ_i 为代数曲线. 即是由 $l_i(x,y)=0$ 所决定的曲线, 其中 $l_i(x,y)$ 为二元多项式. 对 $\forall a\in V^0(T)$, 在 a 处的协调方程可表示为

$$\sum_{\gamma_i\in\Gamma(a)}FH(\gamma_i,a)l_i^{\mu_i+1}q_i=0,$$

其中 $FH(\gamma_i,a)=\pm1$. μ_i 为样条函数在 γ_i 上的光滑次数, q_i 为 γ_i 上的光滑余因子. 对于 Γ^0 的一个给定编号 $\Gamma^0=\{\gamma_1,\cdots,\gamma_m\}$, 给出如下定义:

对 $\forall\Gamma'\subset\Gamma^0$, 定义 $M(\Gamma'):=\max\{i:\gamma_i\in\Gamma'\}, m(\Gamma'):=\min\{i:\gamma_i\in\Gamma'\}$.

对 $\forall\, a \in V^0$，定义 $M(a):=\max\{i:\gamma_i \in \Gamma(a)\} = M(\Gamma(a))$，$m(a):=\min\{i:\gamma_i \in \Gamma(a)\} = m(\Gamma(a))$. 定义 $d(a):=M(a)-m(a)+1$. 称 $d(a)$ 为内网点 a 对应于编号 $\Gamma^0=\{\gamma_1,\cdots,\gamma_m\}$ 的带宽.

对 $\forall\, P \subset V^0$，定义 $d(P):=\max\{d(a):a\in P\}$.

$d(V^0)$ 被称为剖分 T 的带宽. $d(V^0)$ 的大小与 Γ^0 的编号有关，希望能给出 Γ^0 的一个编号方法，使 $d(V^0)$ 尽可能小.

§5　与分解同步的编号

设 $\Gamma^0=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cdots\cup\Gamma_s$，$\Gamma_i\cap\Gamma_j=\varnothing\,(i\neq j)$，$\Gamma_i\neq\varnothing$，$i=1,\cdots,s$. 这时称有序的多元组 $(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_s)$ 为 Γ^0 的一个分解. 记为

$$\Gamma^0=(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_s). \tag{1}$$

称 编号 $\Gamma^0=\{\gamma_1,\cdots,\gamma_m\}$ 是与分解(1) 同步的，如果

1.　$m(\Gamma_1)=1,\ M(\Gamma_s)=m$；

2.　$M(\Gamma_i)+1=m(\Gamma_{i+1}),\ i=1,\cdots,s-1$.

定理 1　设 $\Gamma^0=\{\gamma_1,\cdots,\gamma_m\}$ 为与分解(1) 同步的编号，则对任意 l,n，$1\leqslant l\leqslant n\leqslant s$，有

$$\Gamma_l\cup\Gamma_{l+1}\cup\cdots\cup\Gamma_n=\{\gamma_j,\gamma_{j+1},\cdots,\gamma_k\},$$

其中 $j=m(\Gamma_l)$，$k=M(\Gamma_n)$.

证明　设 $\gamma_i\in\Gamma_l\cup\cdots\cup\Gamma_n$. 不妨设 $\gamma_i\in\Gamma_h$，$(l\leqslant h\leqslant n)$，则有 $m(\Gamma_h)\leqslant i\leqslant M(\Gamma_h)$. 由于编号是同步的，所以有 $j=m(\Gamma_l)\leqslant m(\Gamma_h)\leqslant i\leqslant M(\Gamma_h)\leqslant M(\Gamma_n)=k$. 即有 $\gamma_i\in\{\gamma_j,\cdots,\gamma_k\}$.

反之，设 $j\leqslant i\leqslant k$，这时必有 h 存在，$l\leqslant h\leqslant n$，使 $m(\Gamma_h)\leqslant i\leqslant M(\Gamma_h)$. 这时必有 $\gamma_i\in\Gamma_h$. 即有 $\gamma_i\in\Gamma_l\cup\cdots\cup\Gamma_n$. 证毕.

§6　连通剖分下 Γ^0 的分解

给定一个剖分 $T(\overline{D})=(V(T),\Gamma(T))$. 假定剖分 T 是连通的，任选 $p_0\in V^0(T)$. 记 $P_i:=\{a\in V^0(T):d(p_0,a)=i\}$. 记 $n:\max\{i:P_i\neq\varnothing\}$. 由 T 的连通性有

$$V^0=P_0\cup P_1\cup\cdots\cup P_n$$

其中 $P_0=\{p_0\}$，$P_i\cap P_j=\varnothing\,(i\neq j)$，$P_i\neq\varnothing\,(i=0,\cdots,n)$. 记 $\Gamma_i:=\Gamma(P_i)$. 对任意的 $\gamma\in\Gamma_i$，即表示 γ 有一个端点在 P_i 中. 这时，根据 P_i 的定义，γ 只有下述 4 种可能性：

1. γ 的另一个端点 $\in P_{i+1}$；　2. γ 的另一个端点 $\in P_{i-1}$；

3. γ 的两个端点均 $\in P_i$；　4. γ 的另一个端点 $\in \partial D$.

记 $\Gamma_i^+:=\{\gamma\in\Gamma_i,\gamma$ 的另一端点 $\in P_{i+1}\}$；$\Gamma_i^-:=\{\gamma\in\Gamma_i,\gamma$ 的另一端点 $\in P_{i-1}\}$；$\Gamma_i^0:=\Gamma_i\backslash(\Gamma_i^+\cup\Gamma_i^-)$.

定理 2　$\Gamma_i^-\neq\varnothing$，$\Gamma_i^+\neq\varnothing$，$i=1,\cdots,n-1$；$\Gamma_0^+\neq\varnothing$，$\Gamma_n^-\neq\varnothing$.

证明　对任意 $i:1\leqslant i\leqslant n-1$，由剖分的连通性可知：$P_{i-1}\neq\varnothing$，$P_{i+1}\neq\varnothing$，$P_i\neq\varnothing$. 设

$a \in P_{i+1}$，即 $d(p_0,a) = i+1$，且设 p_0 到 a 的最短道路为

$$p_0, a_1, \cdots, a_i, a.$$

则必有 p_0 到 a_i 的最短道路为 $p_0, a_1, \cdots, a_i$. 这时有 $d(p_0, a_i) = i$，于是 $a_i \in P_i$. 由于 $a_i a$ 为相邻的，所以必存在 $\gamma \in \Gamma_i$ 使 γ 的两个端点分别为 a_i 与 a. 这样 $\gamma \in \Gamma_i^+$. 即 Γ_i^+ 非空. 同理可证 Γ_i^- 非空，Γ_n^- 非空，Γ_0^+ 非空. 证毕.

定理 3 $\Gamma_{i-1}^+ = \Gamma_i^-, i = 1, 2, \cdots, n-1.$

证明 $\gamma \in \Gamma_{i-1}^+$ 或 Γ_i^- 均表示 γ 的一个端点属于 P_i，另一个端点属于 P_i. 所以两个集合相等. 证毕.

将 Γ_i 分解为 $\Gamma_i = \Gamma_{i-1}^+ \cup \Gamma_i^0 \cup \Gamma_i^+,\ i = 1, \cdots, n-1.$

Γ_0 与 Γ_n 的分解为 $\Gamma_0 = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_0^+, \Gamma_n = \Gamma_{n-1}^+ \cup \Gamma_n^0$. 这样，$\Gamma^0$ 可表示为

$$\Gamma^0 = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_0^+ \cup \Gamma_1^0 \cup \Gamma_1^+ \cup \cdots \cup \Gamma_{n-1}^- \cup \Gamma_n^0.$$

在上式中诸子集互不相交，但 $\Gamma_i^0 (i = 1, \cdots, n)$ 中可能有空集. 这时就将这些空集去掉，上式仍成立. 为了简单起见，仍记 Γ^0 的分解为

$$\Gamma^0 = (\Gamma_0^0, \Gamma_0^+, \Gamma_1^0, \Gamma_1^+, \cdots, \Gamma_{n-1}^+, \Gamma_n^0) \tag{2}$$

定理 4 若 $\Gamma^0 = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_m\}$ 是与分解(2)同步的编号，则

$$d(V^0) \leqslant \max\{\bar{\bar{\Gamma}}_i : i = 0, 1, \cdots, n\}.$$

证明 对任意 $a \in V^0$，不妨设 $a \in P_i$. 这时 $\Gamma(a) \subset \Gamma(P_i) = \Gamma_i$. 所以有

$$M(a) \leqslant M(\Gamma_i),\ m(a) \geqslant m(\Gamma_i),$$

$$d(a) = M(a) - m(a) + 1 \leqslant M(\Gamma_i) - m(\Gamma_i) + 1.$$

由于 $\Gamma = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_m\}$ 与分解(2)同步，而 $\Gamma_i = \Gamma_{i-1}^+ \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_i^+$，所以

$$M(\Gamma_i) = M(\Gamma_i^+), m(\Gamma_i) = m(\Gamma_{i-1}^+).$$

记 $j := m(\Gamma_i), k := M(\Gamma_i)$. 根据定理 1 有

$$\Gamma_i = \{\gamma_j, \cdots, \gamma_k\}.$$

这样，$k - j + 1 = \bar{\bar{\Gamma}}_i$. 即有

$$d(a) \leqslant \bar{\bar{\Gamma}}_i \leqslant \max\{\bar{\bar{\Gamma}}_i : i = 0, 1, \cdots, n\},$$

所以有

$$d(V^0) \leqslant \max\{\bar{\bar{\Gamma}}_i : i = 0, \cdots, n\}.$$

证毕.

§7 一个随机选取的连通剖分的编号

图 2 给出了一个连通剖分编号的例子. 这个编号是与分解(2)同步的. 具体指标如下：

$$\bar{\bar{\Gamma}}_0 = 55, \bar{\bar{V}}_0 = 19;\quad \max\{\bar{\bar{\Gamma}}_i, i = 0, \cdots, 6\} = 17;\quad d(V^0) = 13.$$

图 2 中：

③ 表示一个内网点，3 表示此网点属于 P_3.

为了方便，图 2 中只画出了 Γ^0 的元素.

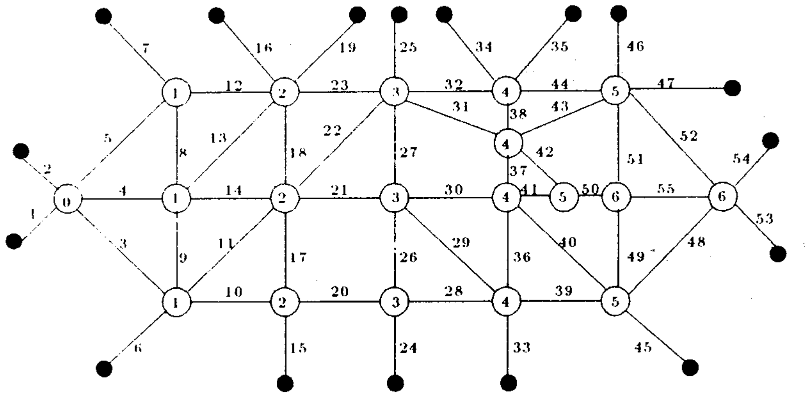
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55

图 2

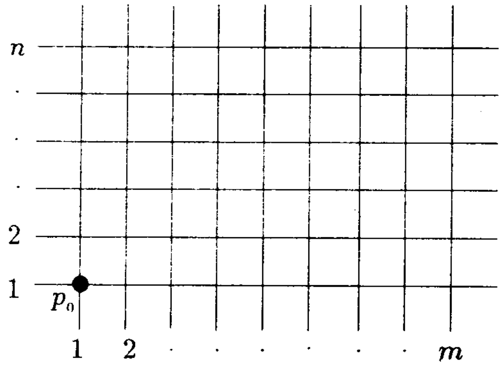
n
2
1
p_0
1 2 m

图 3

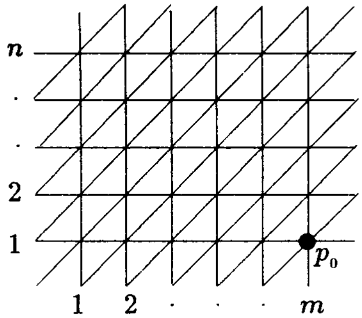
n
2
1
p_0
1 2 m

图 4

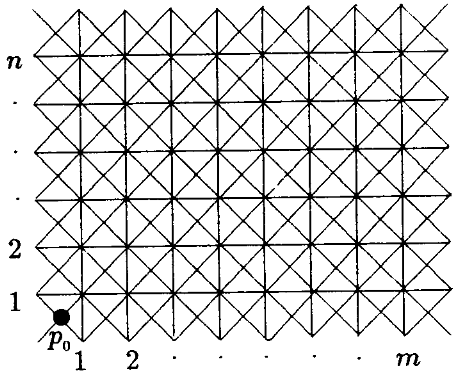
n
2
1
p_0
1 2 m

图 5

§8 一些特殊剖分的带宽分析

对于矩形剖分(见图 3),设它有 n 根横线,m 根竖线.选取图示中的内网点为 p_0.据此对网线编号,得 $d(V^0) \leqslant 4\min(n,m)$.而 Γ^0 有 $2mn+n+m$ 个元素

对于 Ⅰ 型三角剖分(见图 4),选取图示的内网点为 p_0.这时有 $d(V^0) \leqslant 1+5\min(m,n)$,$\bar{\bar{\Gamma}}_0 = 3mn+2m+2n+1$.

对于 Ⅱ 型三角剖分(见图 5),选取图示的内网点为 p_0.有 $d(V^0) \leqslant 6+10\min(m,n)$,$\bar{\bar{\Gamma}}_0 = 6mn+5m+5n+4$.

参 考 文 献

[1] 王仁宏,多元齿的结构与插值,数学学报,18(1975),91—106.

Edge Numbering for Connected Interpolation of Inner Vertices

Qi Tao　　Wang Renhong

(Inst. of Math. Scis., Dalian Univ. of Tech., 116024)

Abstract

We discuss the method of numbering the edges of inner vertices for connected interpolations, in order to make the relevant coordination equation with the least bandwidth. This is helpful for determining the space of spline functions under a specific interplation.

Keywords connected interpolations, inner vertices, coordination equation, spline function.