第16卷第1期 1996年2月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 16 No. 1 Feb. 1996

Moore 机器的若干应用*

严亚强
(苏州大学数学系, 215006)

摘 要 本文利用 G. M. Reed 构造的 Moore 机器证明了: (1)Moore 空间中的弱 Lindelöf 性严格介于 CCC 与 DCCC 之间; (2) 强星可遮的 Moore 空间不必是星仿紧的..

关键词 弱 Lindelöf, CCC, DCCC, 星仿紧, 强星可遮.
分类号 AMS(1991) 54D20/CCL O189.1

在 Moore 空间类中,链条件的蕴含关系

$$\text{可分} \to \text{Caliber}\,\omega_1 \to \text{Caliber}(\omega_1,\omega) \to \text{CCC} \to \text{DCCC}$$

是否严格?这个问题引起了很多学者的重视. 1974 年, G. M. Reed[5] 构造了一种制造 Moore 空间的机器 — 本文简称 Moore 机器,使一个正则第一可数空间 X,经它作用后能输出一个 Moore 空间 $\mu(X)$, Reed 证明了"$\mu(X)$ 具有可分性、CCC 或 DCCC 当且仅当 X 具有相应的性质". 1989 年, McIntyre[9] 证明了:"当且仅当 X 具有 Caliberω_1 或 Caliber(ω_1,ω) 时, $\mu(X)$ 具有相应的性质."因此,这五种链条件在一般空间中的严格蕴含关系可以提高到 Moore 空间类中,这样,上述问题得到解决. 由此可见, Moore 机器具有深刻的研究和应用价值.

定义 1[10] 空间 X 称为弱 Lindelöf 的,如果它的任意开覆盖 $\mathscr{U}$ 都可以选出可数子族 $\mathscr{U}'$,使 $\bigcup \mathscr{U}'$ 在 X 中稠.

今知(见[8]),弱 Lindelöf 性严格介于 CCC 与 DCCC 之间,但在 Moore 空间类中这种严格的蕴含关系是否仍保持?这是个令人关注的问题,本文将利用 Moore 机器给以肯定的回答.

定义 2[7] 一个空间称为星仿紧的(强星可遮的),如果对任意开覆盖 $\mathscr{U}$,存在局部有限(分别地, σ- 离散) 开覆盖 $\mathscr{V}$,使 $\mathscr{V}$ 加细 $\{\mathrm{st}(x,u)\,|\,x \in X\}$.

早在 1980 年 Reed[7] 就提出了, Moore 空间类中星仿紧与强星可遮是否具有某种蕴含关系?这个问题至今尚未解决(见[4]),作为 Moore 机器的另一个应用,本文将证明:强星可遮的 Moore 空间不必是星仿紧的.

§1 Moore 机器的构造

1. 由第一可数 T_2 空间 X 产生的 Moore 空间 $v(X)$

令 X 是一个第一可数 T_2 空间,对每个 $x \in X$,令 $U_1(x), U_2(x), \cdots$ 为 X 中点 x 处的不增的局部基序列. 设 S_1 和 $\{S_{(1,i)}\}_{i\in N}$ 是 X 的一族互不相交的拷贝;令 $v(X) = S_1 \cup (\bigcup_{i\in N} S_{(1,i)})$. 对

* 1993年3月16日收到.

$p \in v(X)$，将 X 上相应与 p 重合的点记作 x_p. 定义

$$G_j(p)=\begin{cases}\{p\}, 若\ p\in S_{(1,i)}\ 对某个\ i,\\ \{p\}\cup\{q\in S_{(1,i)}\mid i\geqslant j, x_q\in U_i(x_p)\}, 若\ p\in S_1.\end{cases}$$

显然，$\mathscr{B}=\{G_j(p)\mid p\in v(X), j\in N\}$ 是 $v(X)$ 的一个基；令 $g_n=\{G_j(p)\mid p\in v(x), j\geqslant n\}$，则 $\{g_n\}_{n\in N}$ 是 $v(X)$ 的一个展开.

易见，$v(X)$ 还是一个完全正则 Moore 空间，每个基开集是既开又闭的，S_1 是 $v(X)$ 的闭子集，它没有极限点.

现将 $\{S_{(1,i)}\}_{i\in N}$ 看作平行地收敛于 S_1 的一族直线，$v(X)$ 就可直观地理解为：$\bigcup\limits_{i\in N}S_{(1,i)}$ 处的点均是孤立点，而在 S_1 上每点的邻域基是一族锥体，随着 j 的增加而缩小.

2. 由第一可数 T_3 空间产生的 Moore 空间 $\mu(X)$

主要的 Moore 机器 $\mu(X)$ 的建立可描述为 $v(X)$ 的"无限维"扩张，即在每个 $S_{(1,i)}$ 上建立"收敛于"它的可数个拷贝，然后在这些拷贝上以同样方式建立可数多个拷贝，将这一过程重复可数多次，最后令 $\mu(X)$ 是所有这些拷贝的并，在每个拷贝的每点上，适当定义该点处的一族锥形作为它的邻域基. 为了保证 $\mu(X)$ 的正则性，要求 X 是正则的.

设 X 是一个正则第一可数空间，对每点 $x\in X$，令 $U_1(x), U_2(x), \cdots$ 是 x 的一族基邻域，且对每个 i，$\overline{U_{i+1}(x)}\subset U_i(x)$. 对自然数 m，令 $A_m=\{(n_1,\cdots,n_m)\mid n_1=1$，对于 $1\leqslant i\leqslant m, n_i\in N\}$，再令 $A=\bigcup\limits_{m\in N}A_m$. 对任意 $a\in A$，指定 S_a 是 X 的拷贝. 设所有这些拷贝两两不交，且当 $a=(1)$ 时，S_a 简记作 S_1. 对 $x\in X$，设 $x_a=x_{(n_1,\cdots,n_m)}$ 是 S_a 上与 x 恒同的那个点，令 $\mu(X)=\bigcup\limits_{a\in A}S_a$. 对每个 $j\in N$ 及任意的 $a=(n_1,\cdots,n_m)\in A$ 和 $p=y_a\in S_a$，定义

$G_j(p)=\{p\}\cup\{x_{(n_1,\cdots,n_m,k_1,\cdots,k_c)}\mid x\in X, c\in N$，对于 $1\leqslant i\leqslant c, k_i\geqslant j$，且 $x\in U_{k_1+j}(y)\}$，

显然，$\mathscr{B}=\{G_j(p)\mid p\in u(X), j\in N\}$ 是 $\mu(X)$ 的基，令 $g_n=\{G_j(p)\mid p\in\mu(X), j\geqslant n\}$，则 $\{g_n\}_{n\in N}$ 是 Moore 空间 $\mu(X)$ 的展开. 易见 $v(X)$ 是 $\mu(X)$ 的闭子空间.

§2　主要结果

1. Moore 空间类中的弱 Lindelöf 性严格介于 CCC 与 DCCC 之间

定理 1　若 X 是 Lindelöf 空间，则 $\mu(X)$ 是弱 Lindelöf 空间.

证明　不失一般性，设 $\mathscr{U}=\{G_p\mid p\in\mu(X)\}$ 是一个由基开集组成的覆盖，对每个 $a\in A$，设 $\mathscr{U}_a=\{G_p\mid p\in S_a\}$，只要证存在可数子族 $\mathscr{V}_a\subset\mathscr{U}_a$，使 $S_a\subset\overline{\bigcup\mathscr{U}_a}$.

令 π 是 $\mu(X)$ 到 X 的自然映射，则 π 是可数到一开映射，对 $n\in N$ 及 $a=(n_1,\cdots,n_m)\in A$，令 $a_n=(n_1,\cdots,n_m,n)\in A$. 现在，对每个 $G_p\in\mathscr{U}_a$，存在 $j_p\in N$ 使 $G_p=G_{j_p}(p)$. 容易验证下列二条件：

(1)　$\forall\, p\in S_a, \forall\, n\geqslant j_p, \pi(p)\in\pi(G_p\cap S_{a_n})=U_{n+j_p}(\pi(p))$.

(2)　$\forall\, n\in N, \mathscr{H}_n=\{\pi(G_p\cap S_{a_m})\mid G_p\in\mathscr{U}_a, m\geqslant n\}$ 是 X 的一个开覆盖.

若 X 是 Lindelöf 的，令 $\mathscr{K}_n$ 是 $\mathscr{H}_n$ 的可数子覆盖，则相应地，对每个 $U\in\mathscr{K}_n$，存在 $p\in S_a$ 及 $m\geqslant n$，使 $\pi(G_p\cap S_{a_m})=U$，令 $G_{U,n}=G_p$ 及 $\mathscr{V}_a=\{G_{U,n}\mid n\in N, U\in\mathscr{K}_n\}$，对任意 $p\in S_a$ 及其基邻域 $B_{j_p}(p)$，由 (2) 知，存在 $U\in\mathscr{K}_{j_p}$ 使 $\pi(p)\in U$，且对某个 $q\in S_a$ 及 $n\geqslant j_p$，$U=\pi(G_q\cap S_{a_n})$，故 $G_{U,n}\in\mathscr{V}_a$ 且 $S_{a_n}\cap\pi^{-1}(\pi(p))\subset G_{U,n}\cap B_{j_p}(p)$，所以 $p\in\overline{\bigcup\mathscr{V}_a}$. 这说明 $\mu(X)$ 是

弱 Lindelöf 的.

定理 2 若 X 是弱 Lindelöf 的, $f:X\to Y$ 是连续满射, 则 Y 也是弱 Lindelöf 的.

证明 设 $\mathscr{A}$ 是 Y 的一个开覆盖, 则 $f^{-1}(\mathscr{A})$ 是 X 的开覆盖, 存在可数子族 $f^{-1}(\mathscr{A}')$ 使 $\overline{\bigcup f^{-1}(\mathscr{A}')}=X$, 但由 f 的连续性,

$$f^{-1}\overline{(\bigcup\mathscr{A}')}\supset\overline{f^{-1}(\bigcup\mathscr{A}')}=\overline{\bigcup f^{-1}(\mathscr{A}')}, \text{故} \overline{\bigcup\mathscr{A}'}=Y.$$

例 3 存在一个有 DCCC 的非弱 Lindelöf 的 Moore 空间.

证明 因 ω_1 是一个有 DCCC 的非弱 Lindelöf 空间, 从定理 2 知 $\mu(\omega_1)$ 不是弱 Lindelöf 的. 又由[5]知 $\mu(\omega_1)$ 具有 DCCC.

例 4 存在一个弱 Lindelöf 的非 CCC 的 Moore 空间.

证明 令 H 和 K 是实直线 R 上一对 Bernstein 集, 即 H 和 K 不可数, $H\cap K=\varnothing$, H 的不可数子集有 K 的极限点, K 的不可数子集有 H 的极限点, 令 $X=H\cup K$, 设 K 中的点是孤立点, 而 H 中点的基邻域是按 R 上的寻常拓扑所定义, 则 X 是正则 Lindelöf 空间, 它是第一可数且不具有 CCC, 由定理 1 和[5]的结论(见本文第一节), $\mu(X)$ 是个不具有 CCC 的弱 Lindelöf 的 Moore 空间.

综合定理 1— 例 4 所述, 得到

定理 5 Moore 空间类中, CCC $\to$ Lindelöf $\to$ DCCC 是个严格的蕴含关系.

2. 强星可遮的 Moore 空间未必是星仿紧的

定理 6 设 R 是实数空间, 则 $v(R)$ 是强星可遮的不可分的 Moore 空间, 它不是星仿紧的.

证明 $v(R)$ 的不可分性是显而易见的. 先证 $v(R)$ 是强星可遮的.

设 Q 是有理数集, 对 $v(R)$ 的任一开覆盖 $\mathscr{U}$, 设 $\mathscr{U}'=\{U\mid U\in\mathscr{U}, U\cap S_1\neq\varnothing\}$. 因为 Q 和 N 都可数, $\mathscr{H}_0=\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}')\mid x\in\pi^{-1}(Q)\cap S_{(1,i)}, i\in N\}$ 是 S_1 的一个可数开覆盖, 它当然是 $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U})\mid x\in v(R)\}$ 的一个部分加细, 令 $\mathscr{H}_i=\{\{x\}\mid x\in S_{(1,i)}\}$, 则 $\mathscr{H}_i$ 是离散开集族且覆盖 $S_{(1,i)}$, 于是 $\mathscr{H}=(\bigcup_{i\in N}\mathscr{H}_i)\cup\mathscr{H}_0$ 是 $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U})\mid x\in v(R)\}$ 的 σ- 离散开加细, 故 $v(R)$ 是强星可遮的.

下面证明 $v(R)$ 不是星仿紧的.

设 E 是无理数集, $Q=\{r_i\}_{i\in N}$ 是有理数集. 在 E 上作等价关系 $\sim$: 使 $\alpha\sim\beta$ 当且仅当 $\alpha-\beta\in Q$, 在每个等价类中取一代表构成集合 E_*. 对每个 $i\in N$, 定义 $E_i=E_*+r_i=\{\alpha+r_i\mid\alpha\in E_*\}$, 则每个 E_i 是 E_* 的一个平移; 当 $i_1\neq i_2$ 时, $E_{i_1}\cap E_{i_2}=\varnothing$, 且 $E=\bigcup_{i\in N}E_i$. 由于 E 是第二纲的, 易知每个 E_i 也是第二纲的. 以下我们把有理数集放入 E_1, 并仍记作 E_1, 这样, $\{E_i\}_{i\in N}$ 就是 R 的一个分划.

在空间 $v(R)$ 中, 由于 S_1 是 R 的拷贝, 我们约定 E_i 是在 S_1 上分划的, 而 S_1 上的"区间"是指 R 上相应的区间. 令 $U_i=(\bigcup_{k=i}^{\infty}S_{(1,k)})\cup E_i$, $\mathscr{U}=\{U_i\}_{i\in N}$, 则 $\mathscr{U}$ 是 $v(R)$ 的一个开覆盖, 且 $\mathscr{H}=\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U})\mid x\in v(R)\}=\{\bigcup_{k=1}^{i}U_k, U_i\mid i\in N\}$ 也是 $v(R)$ 的一个(可数)开覆盖, 设 $\mathscr{V}=\{V_\tau\}_{\tau\in T}$ 是 $\mathscr{H}$ 的一个加细, 现证 $\mathscr{V}$ 不可能是局部有限的.

对任意 $x\in R$, 设其邻域基为 $\{(x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n})\}_{n\in N}$, $\{G_n(x)\}_{n\in N}$ 为 $v(R)$ 中相应的邻域基. 令 $F_i^j=\{x\in E_i\mid\exists\ \tau\in T$, 使 $G_j(x)\subset V_\tau$; 但 $\forall\ j'<j, G_{j'}(x)\not\subset V_\tau$ 对任何 $\tau\in T\}$, 则 $\bigcup_{j\in N}F_i^j$

$=E_i$. 设 $i_1=1$，因 E_{i_1} 是第二纲的，存在 $j_1\in N$，使 $F_{i_1}^{j_1}$ 在某区间 $[a_1,b_1]$ 内稠. 对于 E_2，存在某区间 $[c_1,d_1]$，且 $d_1-c_1<b_1-a_1$，使 E_2 在 $[c_1,d_1]$ 内是第二纲的. 由 Q 的稠密性，存在某个 $t\in Q$，使 E_2+t 将 $[c_1,d_1]$ 平移到 $[a_1,b_1]$ 内，记 $E_{i_2}=E_2+t$，上述 t 还可使 $E_{i_2}\neq E_{i_1}$. 由于 E_{i_2} 在 $[c_1,d_1]$ 内是第二纲的，存在自然数 j_2，使 $F_{i_2}^{j_2}$ 在某区间 $[a_2,b_2]\subset[c_1,d_1]$ 内稠 … 无限继续上述过程，得一区间套 $\{[a_n,b_n]\}_{n\in N}$，使 $F_{i_n}^{j_n}$ 在 $[a_n,b_n]$ 内稠. 取 $x_0\in\bigcap_{n\in N}[a_n,b_n]$，任取一个基邻域 $G_{j_0}(x_0)$，对任一个 $i_k(k\in N)$，都存在一点 $x_k\in F_{i_k}^{j_k}$，使 $G_{j_0}(x_0)\cap G_{j_k}(x_k)\neq\varnothing$，只要 $|x_k-x_0|<\min(\frac{1}{j_k},\frac{1}{j_0})$. 于是对于包含 $G_{j_k}(x_k)$ 的 V_r，$G_{j_0}(x_0)\cap V_r\neq\varnothing$. 这样的 V_r 必是可数多个，不然的话，存在某个 V_r，使对可数个 E_i，$V_r\cap E_i\neq\varnothing$，但 $\mathscr{H}$ 中每个元素只与有限个 E_i 相交，既然 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{H}$ 的加细，$\mathscr{V}$ 中每个元素也只能与有限个 E_i 相交，矛盾. 因此 $\mathscr{V}$ 不是局部有限的.

本文得到吴利生和陈必胜老师的帮助，谨此致谢.

参 考 文 献

[1] vanDouwen and G. M. Reed, *On chain conditions in Moore spaces* I, Top. Appl., 39(1991), 65—69.

[2] vanDouwen, G. M. Reed, A. W. Roscoe and I. J. Tree, *Star covering properties*, Top. Appl., 39 (1991), 71—103.

[3] S. Watson and Zhou Haoxuan, *Caliber*(ω_1,ω) *is not productive*, Technical Report 89—311, York Univ, 1989.

[4] vanMill and G. M. Reed, *Open Problems in Topology*, North-Holland, 1990.

[5] G. M. Reed, *On chain conditions in Moore spaces*, Gen. Top. Appl., 4(1974a), 255—267.

[6] G. M. Reed, *On continuous images of Moore spaces*, Can. J. Math., 24(1974), 1475—1479.

[7] G. M. Reed, *On normality and countable paracompactness*, Fund. Math., 110(1980), 145—152.

[8] 戴牧民，涉及到 Caliber 和 Lindelöf 性的几个反例，数学学报，29(1986)，366—402.

[9] D. W. McIntyre, *On chain conditions in Moore spaces*, Doctoral dissertation for transfer status, Oxford Univ. 1989 University of Tennessee Top. Conf.

[10] B. M. Ginsburg and G. Woods, *Cardinal inequalities for topological spaces involving weak Lindelöf number*, Pacific. J. M., 79(1978), 37—45.

Some Applications of the Moore Spaces Machines

Yan Yaqiang

(Dept. of Math., Suzhou University, 215006)

Abstract

We make use of the Moore space machines constructed by G. M. Reed to prove: that the weak Lindelöf property is strictly located between CCC and DCCC in Moore spaces, and a star-strongly screenable Moore space need not be star-paracompact.

Keywords weak Lindelöf, CCCC, DCCC, star-paracompact, star-strongly screenable.