广义函数多目标规划的充分条件*

董加礼　王金鹤　刘庆怀
(吉林工业大学应用数学系，长春130025)

摘　要　本文借助于广义函数的调和表示，采用非标准分析方法，给出广义函数多目标规划的几个充分条件.

关键词　广义函数，多目标规划，充分条件.
分类号　AMS(1991) 49K10,90C29/CCL O224

一　预备知识

用 R^n 表示 n 维欧氏空间，并记 $R = R^1$，$\overline{R} = R \cup \{\pm\infty\}$，$\overline{R}^n = \overbrace{\overline{R}\times\overline{R}\times\cdots\times\overline{R}}^{n\uparrow}$.

用 $^*R$ 表示 R 的非标准扩张，即超实数域. $^*R^n = \overbrace{^*R\times{}^*R\times\cdots\times{}^*R}^{n\uparrow}$ 为 R^n 的非标准扩张. 即 n 维超实数域. 设 $x \in {}^*R^n$，称集合

$$\mu(x) = \{y \in {}^*R^n | y \simeq x\} = \{y \leqslant {}^*R^n | \, \| y - x \| \text{ 为无限小数}\}$$

为 x 在 $^*R^n$ 中的单子，并记

$$\mu_+(x) = \{y \in \mu(x) | y > x\}.$$

在 $^*R^n$ 上运算的标准部分用"0"表示，并规定 $^*R^n$ 中集合 A 的标准部分为

$$^0A = \{^0a | a \in A\}.$$

为简单起见，有时省略"＊"[1,2].

用 $\mathcal{D}'(R^n)$ 表示广义函数空间，$\mathcal{D}'(R^n)$ 中的元素叫做 $\mathcal{D}'$ 广义函数，简称广义函数(Schwartz Distributions)[3].

任何广义函数 $T \in \mathcal{D}'(R^n)$ 都存在调和表示，并用 $HR(T)$ 表示 T 的全体调和表示[4]. 对正则广义函数 f 来说，其 Poisson 积分 $u(x,y)$ 就是 f 的调和表示，而且几乎处处有

$$\lim_{y\to 0^+} u(x,y) = f(x)^{[5]}.$$

设 $T \in \mathcal{D}'(R^n)$，$x_0 \in R^n$，$u \in HR(T)$，记 $u^{(1)}(x,y) = \nabla_x u$，则称

$$\partial T(x_0) = \mathrm{co}\{^0[{}^*u^{(1)}(x,y)] | x \in \mu(x_0), y \in \mu_+(0)\}$$

为广义函数 T 在 x_0 点的一阶集值导数. 而

$$T(x_0) = \partial^{(0)}(x_0) = \mathrm{co}\{^0[{}^*u(x,y)] | x \in \mu(x), y \in \mu_+(0)\}$$

称为 T 在 x_0 点的值. ∂T 和 T 都是集值映射，且 $\partial T(x_0)$ 和 $T(x_0)$ 分别是 $\overline{R}^n$ 和 $\overline{R}$ 中的闭凸集[6,7].

＊ 1993年4月3日收到. 国家自然科学基金资助项目.

二　定义与择一性定理

设 $T_i \in \mathfrak{D}(R^n)(i=1,2,\cdots,m)$，则称 $T=(T_1,\cdots,T_m)^T$ 为 m 维向量广义函数．又 $u_i \in HR(T_i)$，并且 Ju 表 $u=(u_1,\cdots,u_m)^T$ 的 Jacobians 阵，即

$$Ju(x,y)=\frac{\partial(u_1,\cdots,u_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}(x,y).$$

规定 T 在 $x_0 \in R^n$ 点的值和集值导数分别为

$$T(x_0)=\mathrm{co}\{(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)^T \in \overline{R}^m \mid \alpha_i \in T_i(x_0), i=1,\cdots,m\},$$

$$\partial T(x_0)=\mathrm{co}\{{}^0[{}^*Ju(x,y)] \mid x \in \mu(x_0), y \in \mu_2(0)\}.$$

T 和 ∂T 都是集值映射，$T(x_0)$ 是 $\overline{R}^m$ 中的闭凸集，$\partial T(x_0)$ 可看作 $\overline{R}^{m\times n}$ 中的闭凸集．

设 $S \subset R^n$ 为开凸集，$\hat{K}$、K、Q、T 分别为 R^n、R^m、R^p、$R^{m\times n}$ 中的闭凸序锥，

$$R_+=\{x \in R \mid x \geqslant 0\}, R_-=\{x \in R \mid x < 0\}.$$

设 $F=(f_1,\cdots,f_m)^T, G=(g_1,\cdots,g_p)^T(f_i,g_j \in \mathfrak{D}'(R^n), i=1,\cdots,m; j=1,\cdots,p)$ 为向量广义函数，规定 $F:S \rightrightarrows R^m, G:S \rightrightarrows R^p$ 为上述赋值意义下的集映射，并约定它们均取有限值．

现在考虑下述所谓广义函数多目标规划问题：

$$(\mathrm{VP})\qquad \begin{cases}\min F(x)=\mathrm{co}\{(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)^T \in R^m \mid \alpha_i \in f_i(x), i=1,\cdots,m\},\\ \mathrm{s.t.}\ G(x)\cap(-Q)\neq\varnothing, x \in S,\end{cases}$$

其中 $G(x)=\mathrm{co}\{(\beta_1,\cdots,\beta_p)^T \in R^p \mid \beta_j \in g_j(x), j=1,\cdots,p\}$.

记(VP)的可行集为 $M=\{x \in S \mid G(x)\cap(-Q)\neq\varnothing\}$.

定义 2.1　称 $\bar{a} \in \bigcup_{x\in M} F(x)$ 为 $\bigcup_{x\in M} F(x)$ 的有效点(弱有效点)，如果不存在 $a \in \bigcup_{x\in M} F(x)$，使

$$\bar{a}-a \in K\backslash\{0\}(\bar{a}-a \in \mathrm{int}K).$$

用 E_{pa} 和 E_{wp} 表示 $\bigcup_{x\in M} F(x)$ 的有效点和弱有效点的全体．

称 $\bar{x} \in M$ 为(VP)的有效解(弱有效解)，如果

$$F(\bar{x})\cap E_{pa}\neq\varnothing(F(\bar{x})\cap E_{wp}\neq\varnothing).$$

定义 2.2　设 $f \in \mathfrak{D}'(R^n)$ 为广义函数．

(i)　称 f 在 $\bar{x} \in S$ 处是伪尖的，如果

$$\partial f(x)\subset\hat{K}\ \text{蕴含}\ f(x)\subset f(\bar{x})+R_+,\quad \forall x \in S;$$

(ii)　称 f 在 $\bar{x} \in S$ 处是拟尖的，如果

$$f(x)\subset f(\bar{x})-R_+\ \text{蕴含}\ \partial f(x)\subset-\hat{K},\quad \forall x \in S.$$

如果将定义中的 f 换成向量广义函数 F，并相应地将 $\hat{K}$ 换 T，R_+ 换 K，则称为向量广义函数 F 在 $\bar{x} \in S$ 处的伪尖性和拟尖性．

定义 2.3[8]　设函数 $W: R^s \to R, Y \subset R^s$ 为凸锥，$A \subset R_-$．称 W 是 R^s 上的弱分离函数，如果

$$\overline{Y} \subset \{y \in R^s | W(y) \notin A\}.$$

对 $\forall \eta \in R^m$,置

$$Z(x) = -\partial(\eta^T F(x)) \times \partial G(x), \quad \forall x \in R^n,$$

则 $Z: R^n \rightleftharpoons R^{(p+1)\times n}$.

引理(择一性) 设 $R^s(s=(p+1)\times n)$,Y,A,$Z(x)$ 如上,W 为 R^s 上的任一弱分离函数,则下面两个结论不能同时成立:

(i) 存在 $x \in R^n$,使 $Z(x) \subset \overline{Y} \neq \varnothing$;

(ii) $W(Z(x)) \subset A$,$\forall x \in R^n$.

证明 设(ii)成立.对 $\forall x \in R^n$ 及 $y' \in Z(x)$,则 $W(y') \in A$.于是,由弱分离函数定义知

$$y' \notin \{y \in R^s | W(y) \notin A\}.$$

而 $\overline{Y} \subset \{y \in R^s | W(y) \notin A\}$,故 $y' \notin \overline{Y}$.再由 y' 的任意性,便知(i)不成立.

反之,若(i)成立,类似可证(ii)不成立.

三 充分条件

定理 3.1 设 $S \subset R^n$ 为开凸集,$\eta \in K^+ \setminus \{0\}$,$\eta^T F$ 在 $\overline{x} \in S$ 处伪尖,$\partial(\eta^T F(\overline{x})) \subset \hat{K} \cup (-\overline{K})$;$0 \in \partial G(\overline{x}, G(\overline{x}) \cap (-Q) \neq \varnothing$.若存在 $\overline{\lambda} \in \hat{K}^+ \setminus \{0\}$,$\overline{\theta} \in R^{p\times n}$,使得对 $\forall x \in \mu(\overline{x})$,$\forall u \in \partial(\eta^T F(x))$ 及 $v \in \partial G(x)$,有

$$\overline{\lambda}^T u + \overline{\theta}^T v \in R_+, \tag{1}$$

则 $\overline{x}$ 是(VP)的局部弱有效解.

这里 $K^+ = \{y \in (R^m)^* | y^T x \geqslant 0, \forall x \in K\}$ 为 K 的对偶锥,而 $(R^m)^*$ 为 R^m 的共轭空间.$\hat{K}^+$ 类.

证明 对给定的 $\lambda \in \hat{K}^+ \setminus \{0\}$,$\theta \in R^{p\times n}$,置

$Z(x) = -(\eta^T F(x)) \times \partial G(x)$, $\forall x \in R^n$;

$W(u,v) = \lambda^T u - \theta^T v$, $\forall u \in -(\eta^T F(x))$,$\forall v \in \partial G(x)$;

$A = R_-$.

于是,(1)式可以等价地写成

$$W(Z(x)) \subset A, \quad \forall x \in \mu(\overline{x}). \tag{2}$$

下证 W 为 $R^s(s=(p+1)\times n)$ 上的弱分离函数.

事实上,若令 $Y = \mathrm{int}\hat{K} \times \{0\}$,则对 $\forall (u,v) \in \overline{Y}$,有 $\overline{u} \in \hat{K}$,$\overline{v} = 0$;且对 $\forall \lambda \in \hat{K}^+ \setminus \{0\}$,有 $\lambda^T \overline{u} \geqslant 0$.从而有 $W(\overline{u},\overline{v}) = \lambda^T \overline{u} - \theta^T \overline{v} = \lambda^T \overline{u} \geqslant 0$,于是 $W(\overline{u},\overline{v}) \notin A$.这说明对 $\forall (\overline{u},\overline{v}) \in \overline{Y}$,有 $W(\overline{u},\overline{v}) \notin A$.再由弱分离函数定义便知,$W$ 是 R^s 上的弱分离函数.

于是,由(2)式及择一性引理知 $Z(\overline{x}) \cap \overline{Y} \neq \varnothing$ 不成立.再由 $Z(x)$ 及 Y 的定义知,上式相当于

$$-\partial(\eta^T F(\overline{x})) \cap \hat{K} \neq \varnothing, \quad 0 \in \partial G(\overline{x})$$

不成立.又由已知条件知,$0 \in \partial G(\overline{x})$,故 $-\partial(\eta^T F(\overline{x})) \cap \hat{K} \neq \varnothing$ 不成立,即对 $\forall b \in$

$\partial(\eta^T F(\bar{x}))$，必有 $b \notin -\hat{K}$. 再由 $\partial(\eta^T F(\bar{x})) \subset \hat{K} \cup (-\hat{K})$ 知，$b \in \hat{K}$. 这说明 $\partial(\eta^T F(\bar{x})) \subset \hat{K}$. 又因为 $\eta^T F$ 在 $\bar{x}$ 处伪尖，故 $\eta^T F(x) \subset \eta^T F(\bar{x}) + R_+$. 所以对 $\forall\, a \in \eta^T F(x)$，必存在 $\bar{a} \in \eta^T F(\bar{x})$，使对 $\forall\, x \in S$，有

$$a \in \bar{a} + R_+，\text{即 } \bar{a} \leqslant_{R_+} a. \tag{3}$$

今设 $\bar{a} = \eta\bar{c}$，$\bar{c} \in F(\bar{x})$. 下证对 $\forall\, x \in S$，不存在 $c \in F(x)$，使

$$\bar{c} \in c + \mathrm{int}K. \tag{4}$$

事实上，若存在 $c \in F(x)$，使 $\bar{c} \in c + \mathrm{int}K$，则

$$\bar{c} - c \in \mathrm{int}K.$$

将 $\eta \in K^+ \backslash\{0\}$ 作用于上式，则有

$$\eta^T(\bar{c} - c) >_{R_+} 0,$$

即 $\eta^T c <_{R_+} \eta^T \bar{c} = \bar{a}$，这与(3) 式矛盾.

由上述讨论可知，不存在 $c \in \bigcup\limits_{x \in M} F(x)$ 使(4) 式成立. 而 $\bar{c} \in F(\bar{x})$，$G(\bar{x}) \cap (-Q) \neq \varnothing$，故 $\bar{c} \in \bigcup\limits_{x\in M} F(x)$. 再注意上述讨论是在 $\bar{x}$ 的单子内进行的，便知 $\bar{c}$ 为 $\bigcup\limits_{x\in M} F(x)$ 的局部弱有效点. 最后，由 $\bar{c} \in F(\bar{x})$ 且 $\bar{c} \in E_{wg}$，$\bar{x} \in M$，即知 $F(\bar{x}) \cap E_{wg} \neq \varnothing$，从而 $\bar{x}$ 为(VP) 的局部弱有效解.

类似地，可以证明下面定理：

定理 3.2　设 $S \subset R^n$ 为开凸集，F 在 $\bar{x} \in S$ 处是伪尖的向量广义函数，$\partial F(\bar{x}) \subset T \cup (-T)$，$0 \in \partial G(\bar{x})$，$G(\bar{x}) \cap (-Q) \neq \varnothing$. 若存在 $\bar{\lambda} \in T^+ \backslash \{0\}$，$\bar{\theta} \in R^{p\times n}$，使得对 $\forall\, x \in \mu(\bar{x})$，$\forall\, u \in \partial F(x)$ 及 $v \in \partial G(x)$，有

$$\bar{\lambda}^T u + \bar{\theta}^T v \in R_+,$$

则 $\bar{x}$ 是(VP) 的局部弱有效解.

下面讨论一种特殊的(VP).

设 $f_i \in \mathfrak{D}'(R^n)(i = 1,\cdots,m)$，取定 $\bar{z}_i \in \mu(x)$，$\bar{y}_i \in \mu_+(0)$，则

$$\bar{f}_i(x) = \mathrm{co}\{{}^0[{}^*u(\bar{z}_i,\bar{y}_i)] \mid \bar{z}_i \in \mu(x), \bar{y}_i \in \mu_+(0)\}$$

均为单值. 实际上，$\bar{f}_i(x)$ 是集合 $f_i(x)$ 中的一个元素. 从而 $F = (f_1,\cdots,f_m)$ 在 x 处的值

$$\bar{F}(x) = \mathrm{co}\{(a_1,\cdots,a_m)^T \in R^m \mid a_i \in \bar{f}_i(x), i = 1,\cdots,m\}$$

也为单值. 对 $\bar{G}(x)$ 也做类似处理，并且 $\partial\bar{F}(x)$ 及 $\partial\bar{G}(x)$ 也做相应理解.

在上述假定下，并将 $\bar{F}(x)$，$\bar{G}(x)$ 仍记作 $F(x)$，$G(x)$，同时将锥序换成坐标序，考虑下述特殊的广义函数多目标规划问题：

$$\overline{(\mathrm{VP})} \qquad \begin{cases} \min\limits_{x\in M} F(x), \\ M = \{x \in S \mid G(x) \leqslant 0\}. \end{cases}$$

并置 $I = \{j \mid g_j(\bar{x}) = 0, \bar{x} \in M, j = 1,\cdots,p\}$.

定理 3.3　设 $\bar{x} \in M$，若存在 $\eta \in R^m_+$ 且 $\eta \neq 0$，$\xi \in R^I_+$ 使 $\eta^T F + \xi^T G_I$ 在 $\bar{x}$ 处伪尖，$\partial(\eta^T F + \xi^T G_I)(\bar{x}) \subset R^n_+$，则 $\bar{x}$ 是 $\overline{(\mathrm{VP})}$ 的弱有效解.

证明　假若不然，则存在 $x' \in M$，使 $F(x') < F(\bar{x})$. 注意 $G_I(x') \leqslant 0 = G_I(x)$，而 $\eta \geqslant 0$ 且 $\eta \neq 0$，$\xi \geqslant 0$，故有

$$\eta^T F(x') + \xi^T G_I(x') < \eta^T F(\bar{x}) + \xi^T G_I(\bar{x}).$$

再由 $\eta^T F + \xi^T G_I$ 在 $\bar{x}$ 处的伪尖性便知，必有

$$\partial(\eta^T F + \xi^T G_I)(\bar{x}) \not\subset R^n_+.$$

这与假设条件矛盾，从而定理得证.

定理 3.4　设 $\bar{x} \in M$，若存在 $\eta \in R^m_+$ 且 $\eta \neq 0$，$\xi \in R^l_+$，使

$$\partial(\eta^T F)(\bar{x}) + \partial(\xi^T G_I)(\bar{x}) \subset R^n_+,$$

且 $\eta^T F$ 在 $\bar{x}$ 处伪尖，$\xi^T G_I$ 在 $\bar{x}$ 处拟尖，则 $\bar{x}$ 是 $\overline{(\mathrm{VP})}$ 的弱有效解.

证明　假若不然，则存在 $x' \in M$，使 $F(x') < F(\bar{x})$. 从而 $\eta^T F(x') < \eta^T F(\bar{x})$，再由 $\eta^T F$ 在 $\bar{x}$ 处的伪尖性知

$$\partial(\eta^T F)(\bar{x}) \not\subset R^n_+. \tag{5}$$

又因为 $G_I(x') \leqslant 0 = G_I(\bar{x})$，故 $\xi^T G_I(x') \leqslant \xi^T G_I(\bar{x})$. 再由 $\xi^T G_I$ 在 $\bar{x}$ 处的拟尖性又知

$$\partial(\xi^T G_I)(\bar{x}) \subset -R^n_+. \tag{6}$$

由(5)及(6)知

$$\partial(\eta^T F)(\bar{x}) + \partial(\xi^T G_I)(\bar{x}) \not\subset R^n_+.$$

这与假设条件矛盾，从而 $\bar{x}$ 是 $\overline{(\mathrm{VP})}$ 的弱有效解.

定理 3.5　设 $\bar{x} \in M$，若存在 $\eta \in R^m_+$ 且 $\eta \neq 0$，$\xi \in R^l_+$，使

$$\partial(\eta^T F)(\bar{x}) + \partial(\xi^T G_I)(\bar{x}) \subset R^n_+,$$

且 $\eta^T F$ 在 $\bar{x}$ 处伪尖，G_I 在 $\bar{x}$ 处拟尖，并至多存在一个 $i \in I$，使 g_i 在 $\bar{x}$ 处为正则非严格可微的广义函数，则 $\bar{x}$ 是 $\overline{(\mathrm{VP})}$ 的弱有效解.

证明　仿定理 3.4 的证明，由 $\eta^T F$ 在 $\bar{x}$ 处的伪尖性可得

$$\partial(\eta^T F)(\bar{x}) \not\subset R^n_+. \tag{7}$$

再由 $G_I(x') \leqslant 0 = G_I(\bar{x})$ 及 G_I 在 $\bar{x}$ 处的拟尖性知

$$\partial G_I(\bar{x}) \subset -R^{l \times n}_+.$$

因为至多存在一个 $i \in I$，使 g_i 在 $\bar{x}$ 处为正则非严格可微的广义函数，故由[7]的定理 5 之推论 6 知

$$\xi^T \times (\partial G_I(\bar{x})) = \partial(\xi^T G_I(\bar{x})),$$

这里上式左端的 $\partial G_I(\bar{x})$ 看作矩阵，"×"表示矩阵的通常乘法运算，以区分前面将矩阵看作向量而作的内积运算. 再由 $\xi \geqslant 0$ 即知

$$\partial(\xi^T G_I)(\bar{x}) \subset -R^n_+.$$

最后，由(7)和(8)知

$$\partial(\eta^T F)(\bar{x}) + \partial(\xi^T G_I)(\bar{x}) \not\subset R^n_+.$$

这与已知矛盾，故 $\bar{x}$ 是 $\overline{(\mathrm{VP})}$ 的弱有效解.

对正则广义函数，上述三个定理自然成立.

参 考 文 献

[1]　徐利治、孙广润、董加礼，现代无穷小分析导引，大连理工大学出版社，1992.

[2] 李邦河，非标准分析基础，上海科技出版社，1987.
[3] 盖尔范德,И.М.，维列金,Н.Я.，广义函数Ⅳ(夏道行译)，科学出版社，1965.
[4] 刘尚平，$D'(R^n)$ 广函作为调和函数的边界值，科学通报，1983，702.
[5] M.Elias，Stein，Cuido，Weiss，欧氏空间上的 Fourier 分析引论(张春阳译)，上海科学出版，1987.
[6] 李邦河、李雅卿、武康平，广义函数的集值导数，中国科学(A)，3(1992)，225—234.
[7] 董加礼、沈阳，n 维广义函数的集值导数，系统科学与数学，4(1995).
[8] F.Giannessi，*Theorem of the althernatation and optimatily conditions*，Journal of Optimization Theory and Applications，42(1984)，311—365.

Sufficient Condition for the Multiobjective Optimization of Schwartz Distributions

Dong Jiali　　*Wang Jinhe*　　*Liu Qinghuai*

(Dept. of Appl. Math., Jilin University of Technology, 130025)

Abstract

The sufficient conditions for optimization problems in the title are given by using the harmonic representation of Schwartz distributions and the methods in nonstandard analysis.

Keywords　schwartz distribution, multiobjective optimization, nonstandard analysis.