第16卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 16 No. 1
1996年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1996

# 关于Fuzzy度量点式刻画的一点注记*

王 戈 平
(徐州师范学院数学系，221009)

**摘 要** 本文中重新定义由一个点式Fuzzy p.q.度量 $d$ 所诱导的Fuzzy p.q.度量 $\{D_r|r>0\}$（代替[1]中的相关重域映射族）.在新的定义下，点式Fuzzy p.q.(p.)度量与Fuzzy p.q.(p.)度量之间有令人满意的一一对应关系.

**关键词** Fuzzy p.q.度量，点式Fuzzy p.q.度量，诱导的Fuzzy p.q.度量.
**分类号** AMS(1991)

梁基华[1]给出了Erceg意义下的Fuzzy度量[2]的一个点式刻画.[1]定理2.6证明了：若 $\{D_r|r>0\}$ 是 $X$ 上的Fuzzy p.q.度量，令 $d(x_\alpha,y_\beta)=\wedge\{r|y_\beta \not\prec D_r(x_\alpha)\neq\varnothing\}$，则 $d$ 是 $X$ 上的点式Fuzzy p.q.度量，且 $d$ 的相关重域映射族恰好是 $\{D_r|r>0\}$.但是该文并没有证明：若 $d$ 是 $X$ 上的点式Fuzzy p.q.度量，且 $\{D_r^*|r>0\}$ 是 $d$ 的相关重域映射族，则由 $\{D_r^*|r>0\}$ 按定理2.6的方式确定的点式Fuzzy p.q.度量恰是 $d$.问题在于：按照[1]中定理2.2定义的相关重域映射族不能保证上述结论是成立的.本文重新定义由一个点式Fuzzy p.q.度量 $d$ 所诱导的Fuzzy p.q.度量 $\{D_r|r>0\}$（代替[1]中的相关重域映射族）.在新的定义下，点式Fuzzy p.q.(p.)度量与Fuzzy p.q.(p.)度量之间有令人满意的一一对应关系.

文中所有未加定义的概念与记号均引自[1].

**定理1** 若 $d$ 是 $X$ 上的点式Fuzzy p.q.度量，对任意 $r>0$ 与 $A\in L^X$，定义

$$D_r(A)'=\vee\{y_\beta|\forall x_\alpha\in J^*(A),d(x_\alpha,y_\beta)\geqslant r\},\tag{1}$$

则 $\{D_r:L^X\to L^X|r>0\}$ 是 $X$ 上的Fuzzy p.q.度量，称为由 $d$ 诱导的Fuzzy p.q.度量.

**证明** 由(1)式容易证明：

$$d(x_\alpha,y_\beta)\geqslant r\Leftrightarrow y_\beta \not\prec D_r(x_\alpha)=\varnothing.\tag{2}$$

〈A1〉 显然有 $D_r(\varnothing)=\varnothing$.

要证 $\forall A\in L^X\backslash\{\varnothing\}$，$\bigvee\limits_{r>0}D_r(A)=X$，只要证 $\forall x_\alpha\in P(L^X)$，$\forall y\in X$，$\bigvee\limits_{r>0}D_r(x_\alpha)(y)=1$.若 $\bigvee\limits_{r>0}D_r(x_\alpha)(y)=\beta_0<1$，令 $D_r(x_\alpha)(y)=\beta_r'$，则 $\beta_r'\leqslant\beta_0$，从而 $\beta_r\geqslant\beta_0'$.故由(2)，$d(x_\alpha,y_{\beta_0'})\geqslant d(x_\alpha,y_{\beta_r})\geqslant r$.但上式不可能对任意 $r>0$ 成立.由此证明了 $\bigvee\limits_{r>0}D_r(x_\alpha)(y)=1$.

〈A2〉 $A\leqslant D_r(A)$.若此式不成立，则存在 $y_\lambda\in J^*(A)$ 使 $y_\lambda\not\leqslant D_r(A)$.故 $\lambda\not\leqslant D_r(A)(y)=\wedge\{\beta'|\forall x_\alpha\in J^*(A),d(x_\alpha,y_\beta)\geqslant r\}$，因此存在 $\beta\in L$ 满足 $\lambda\not\leqslant\beta'$ 且 $\forall x_\alpha\in J^*(A)$，$d(x_\alpha,y_\beta)\geqslant r$.所以 $d(y_\lambda,y_\beta)\geqslant r$，这与〈P1〉矛盾.

* 1993年5月5日收到.94年5月28日收到修改稿.国家自然科学基金资助项目.

〈A3〉 $D_r(\bigvee_{i\in I} A_i)=\bigvee_{i\in I} D_r(A_i)$. 这是因为对任意 $y_\beta$，

$$y_\beta \text{ 八 } D_r(\bigvee_{i\in I} A_i)\neq\varnothing \Leftrightarrow \exists\, x_\alpha\in J^*(\bigvee_{i\in I} A_i), d(x_\alpha,y_\beta)<r$$
$$\Leftrightarrow \exists\, i\in I, \exists\, x_\alpha\in J^*(A_i), d(x_\alpha,y_\beta)<r$$
$$\Leftrightarrow \exists\, i\in I, y_\beta \text{ 八 } D_r(A_i)\neq\varnothing$$
$$\Leftrightarrow y_\beta \text{ 八 } (\bigvee_{i\in I} D_r(A_i))\neq\varnothing.$$

〈A4〉 $D_r\circ D_s\leqslant D_{r+s}$. 只要证 $\forall\, A\in L^X, \forall\, y_\beta\in P(L^X)$，若 $y_\beta$ 八 $D_r(D_s(A))\neq\varnothing$，则 $y_\beta$ 八 $D_{r+s}(A)\neq\varnothing$. 设 $y_\beta$ 八 $D_r(D_s(A))\neq\varnothing$，则 $\exists\, z_\gamma\in J^*(D_s(A))$ 使 $d(y_\beta,z_\gamma)<r$. 如果 $\forall\, x_\alpha\in J^*(A), \forall\,\lambda\in Q(\gamma), d(x_\alpha,z_\lambda)\geqslant s$，则由(1)，$z_\lambda\leqslant D_s(A)'$，即 $D_s(A)(z)\leqslant\lambda'$. 由 $z_\gamma\in J^*(D_s(A))$ 知 $z_\gamma\leqslant D_s(A)$，即 $\gamma\leqslant D_s(A)(z)$，由此得出 $\gamma\leqslant\lambda'$. 这与 $\lambda\in Q(\gamma)$ 矛盾. 上述论证说明 $\exists\, x_\alpha\in J^*(A), \exists\,\lambda\in Q(\gamma)$ 使 $d(x_\alpha,z_\gamma)<s$. 由〈P2〉

$$d(x_\alpha,y_\beta)<d(x_\alpha,z_\lambda)+r<s+r.$$

所以 $y_\beta$ 八 $D_{r+s}(A)\neq\varnothing$.

〈A5〉 $D_r=\bigvee_{s<r} D_s$. 对任意 $A\in L^X, y_\beta\in P(L^X)$ 有

$$y_\beta \text{ 八 } D_r(A)\neq\varnothing \Leftrightarrow \exists\, x_\alpha\in J^*(A), d(x_\alpha,y_\beta)<r$$
$$\Leftrightarrow \exists\, s<r, \exists\, x_\alpha\in J^*(A), d(x_\alpha,y_\beta)<s$$
$$\Leftrightarrow \exists\, s<r, y_\beta \text{ 八 } D_s(A)\neq\varnothing$$
$$\Leftrightarrow y_\beta \text{ 八 } (\bigvee_{s<r} D_r(A))\neq\varnothing.$$

**定理 2** 若 $d$ 是 $X$ 上的点式 Fuzzy p. 度量，则按定理 1 定义的 $\{D_r|r>0\}$ 是 $X$ 上的 Fuzzy p. 度量.

**证明** 只要证对任意 $r>0, A, B\in L^X$，$B$ 八 $D_r(A)\neq\varnothing$ 当且仅当 $A$ 八 $D_r(B)\neq\varnothing$. 这是因为

$$B \text{ 八 } D_r(A)\neq\varnothing \Leftrightarrow \exists\, y_\beta\in J^*(B), y_\beta \text{ 八 } D_r(A)\neq\varnothing$$
$$\Leftrightarrow \exists\, y_\beta\in J^*(B), \exists\, x_\alpha\in J^*(A), d(x_\alpha,y_\beta)<r$$
$$\Leftrightarrow \exists\, x_\alpha\in J^*(A), x_\alpha \text{ 八 } D_r(B)\neq\varnothing$$
$$\Leftrightarrow A \text{ 八 } D_r(B)\neq\varnothing.$$

**定理 3** 设 $\{D_r|r>0\}$ 是 $X$ 上的 Fuzzy p. q. 度量，定义

$$d(x_\alpha,y_\beta)=\wedge\{r|y_\beta \text{ 八 } D_r(x_\alpha)\neq\varnothing\}.$$

则(1) $d$ 是 $X$ 上的点式 Fuzzy p. q. 度量. (2) $d$ 所诱导的 Fuzzy p. q. 度量恰是 $\{D_r|r>0\}$.

**证明** (1) 在[1] 定理 2.6 中已证.

(2) 设由 $d$ 诱导的 Fuzzy p. q. 度量为 $\{D_r^*|r>0\}$，则 $y_\beta$ 八 $D_r^*(x_\alpha)\neq\varnothing\Leftrightarrow d(x_\alpha,y_\beta)<r$. 再由[1] 引理 2.7，$y_\beta$ 八 $D_r(x_\alpha)\neq\varnothing\Leftrightarrow d(x_\alpha,y_\beta)<r$. 由此可知 $D_r^*(x_\alpha)=D_r(x_\alpha)$ 对任意 $x_\alpha\in P(L^X)$ 成立. 由〈A3〉知 $\forall\, A\in L^X, D_r^*(A)=D_r(A)$，从而 $D_r^*=D_r$.

类似上述(2) 的证明可得

**定理 4** 设 $d$ 是 $X$ 上的点式 Fuzzy p. q. 度量，$\{D_r|r>0\}$ 是由 $d$ 诱导的 Fuzzy p. q. 度量. 令

$$d^*(x_\alpha,y_\beta)=\wedge\{r|y_\beta \text{ 八 } D_r(x_\alpha)\neq\varnothing\},$$

则 $d^* = d$.

最后顺便指出，[1] 中利用点式刻划给出了乘积度量的一个构造(定理 3.5). 在证明乘积度量诱导的拓扑是积拓扑，即 $T_d = \underset{n\in N}{\times} T_{d_n}$ 时，其中 $T_d$ 应理解为先由 $d$ 诱导 $X$ 上的 Fuzzy p. 度量 $\{D_r | r > 0\}$ (不是相关重域映射族)，再由 $\{D_r(A) | r > 0, A \in L^X\}$ 为基生成的 $X$ 上的 Fuzzy 拓扑. $T_{d_n}$ 应类似理解. 因此[1] 定理 3.5 的第二部分证明需做相应的修改. 修改后的证明将比原证明简化，这里不再赘述.

## 参 考 文 献


[1] 梁基华，Fuzzy 度量的点式刻划及其应用，数学学报，30(1987)，6:733—741.

[2] M. A. Erceg, *Metric spaces in fuzzy set theory*, J. Math. Anal. Appl., 69(1978), 205—230.


# A Note on the Pointwise Depiction of Fuzzy Metrics


*Wang Geping*

(Dept. of Math., Xuzhou Teachers' College)



**Abstract**

We define the fuzzy p. q. metrix (instead of the associated family of $Q$-neighborhood mappings) induced by a pointwise fuzzy p. q. metric. Under the new definition, there exists an one-to-one correspondence between the pointwise fuzzy p. q. (p.) metrics and the fuzzy p. q. (p.) metrics.



**Keywords** fuzzy p. q. metric, pointwise fuzzy p. q. metric, induced fuzzy p. q. metric.