第 16 卷第 1 期　　数学研究与评论　　Vol. 16 No. 1
1996 年 2 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1996

对"可列无限等可能概型概率场的讨论"一文的注记*

冯慈璜

(杭州大学数学系, 310028)

摘　要　文[1]讨论了一种所谓"可列无限等可能概型概率场",但是[1]提出的问题是前人早已解决了的,处理的方法也缺少新意.

关键词　随机取数,概率空间.

分类号　AMS(1991) 60A99/O211.1

最近文[1]讨论一种所谓"可列无限等可能概型概率场",针对从全体正整数中随机取数问题的一种特殊子集类构成事件域,并在文中合理地定义概率,从而建立概率场.还列举了四个例子详加分析.

在初等概率论教学中,学生会很自然地提出这种"可列无限等可能概型"的问题.现从教学角度谈点个人看法.不当之处请同行指正.

(一)　[1]提出的问题是前人早已解决了的.对可列无限的样本空间 S,S 中元素不可能具有等可能性.事实上,对于可列样本空间 S,总可取 S 的全体子集作为事件域 $\mathscr{B}$,如果对任何 $\omega\in S$,规定 $P(\{\omega\})=p$,无论 $p\neq 0$ 或者 $p=0$ 都不能满足 $P(S)=1$.所以不能建立概率空间 $(S,\mathscr{B},P)$.换一个角度来看,这就是说任何单点集 $\{\omega\}$ 都不是事件,此即任何非空真子集都不是事件.此即[1]中的结论 1 与结论 2.

因此,对于象"从全体正整数中随机选取一数,取到偶数的概率为 $\frac{1}{2}$"的说法,只能按下述意义来理解:对固定的正整数 N,从样本空间 $S_N=\{1,2,\cdots,N\}$ 中随机地(等可能地)取出一数,据古典概型可知取得偶数的概率

$$p_N=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \text{当 } N \text{ 为偶数,}\\[2mm] \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{N}\right), & \text{当 } N \text{ 为奇数.}\end{cases}$$

令 $N\to\infty$ 有 $p_N\to\frac{1}{2}$.值 $\lim\limits_{N\to\infty}p_N=\frac{1}{2}$ 即做为所述的概率.

对[1]中的四个例子都可以按上述办法解决,在此无需赘述.

(二)　如所周知,在初等概率论里,求解某随机事件的概率时,选取合适的样本空间是十分重要的.同一个问题往往可以在许多样本空间都加以解决,但繁简各异.应当选择一个最简单的样本空间,以最简捷的解决去处理.对"从全体正整数中随机取数"问题,如果能将它归结

* 1993 年 6 月 7 日收到.95 年 6 月收到修改稿.

到某一有限样本空间去解决，那是最理想不过了.

例如"在全体正整数中随机取一数，求该数平方的末位数为 1 的概率". 为了选取合适的样本空间，先作这样分析：一个正整数平方的末位数，只决定于该正整数的末位数，它可以是 0，1，2，…9 这十个数字中的任一个. 现在任取一正整数的含义就是这十个数字是等可能出现的. 这样把所求问题放到有限样本空间 $S=\{0,1,2,\cdots,9\}$，欲求概率的事件是 $A=\{1,9\}$. 所以 $P(A)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$.

又如"从正整数中随机取一数，求它是偶数的概率". 可以这样分析：任一正整数的奇偶性决定于它的末位数，它可以是 0，1，2，…，9 这十个数字中的任一个. 现在任取一数的含义，就是这十个数字是等可能出现的，于是将问题归结到有限样本空间 $S=\{0,1,2,\cdots,9\}$，欲求概率的事件 $A=\{0,2,4,6,8\}$，故 $P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$. 这个问题还可以这样考虑：任一正整数被数 2 除之后其余数必为 0 或 1. 任取一数的含义就是余数 0 与 1 是等可能的. 所以可取样本空间 $S=\{0,1\}$，取得偶数这个事件为 $A=\{0\}$，故 $P(A)=\frac{1}{2}$.

一般说来，"从全体正整数取数"问题末必总能将它归结到一个有限样本空间并得出最终解. 这时必须分两步处理：第一步有限化，固定一个自然数 N，在 $S_N=\{1,2,\cdots,N\}$ 中找出相应问题的概率 P_N，第二步令 $N\to\infty$，以 $\lim\limits_{N\to\infty}P_N$ 作为所求事件的概率.

（三） 文[1]说："对从全体正整数中独立地随机取两数情况亦有类似结论"，但没有举例加以说明. 看下述的问题：从全体正整数中独立随机取两数，求它们互素的概率. 按[1]的做法，在样本空间 $S=\{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(2,3),(3,2),(3,3),(3,1),(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(4,3),(4,2),(4,1),\cdots\cdots\}$ 上通过构作 S 的有限分割 $A_1,\cdots,A_K$ 来求这个概率似乎存在极大的困难. 实际上如果不把问题以某种方式化为有限样本空间，象"独立随机取两整数互素"这类问题根本毫无意义可言. 这类问题的通常解法也分两步：第一步有限化，取样本空间

$$S_N=\{1,2,\cdots,N\},N\text{ 为自然数}$$

找出从 S_N 中任取两数互素的概率. 在此因为任何异于 1 的自然数均可唯一地（不计次序先后）分解为素因子的乘积，两数互素等价于它们没有公因子. 令 $p_1<p_2<\cdots$ 为素数从小到大的排列，并记

$$A_{N,t}=\{\text{在 } S_N \text{ 中独立随机取两数 } m,n\text{，它们不含公因子 } p_1,p_2,\cdots,p_t\}.$$

用和事件的概率公式，有

$$P(A_{N,t})=1-\sum_{i=1}^{t}m_i+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant t}m_{ij}-\cdots+(-1)^t m_{1,2,\cdots,t},$$

其中

$$\begin{aligned}m_{i_1,i_2,\cdots,i_k}&=P\{\text{从 } S_N \text{ 中独立随机取两数，它们有公因子 } p_{i_1},p_{i_2},\cdots,p_{i_k}\}\\&=\left(\frac{\left[\frac{N}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}}\right]}{N}\right)^2,\end{aligned}$$

$[x]$ 表示 x 的最大整数部分.

由于

$$\frac{1}{p_{i_1}^2\cdots p_{i_k}^2}-\frac{2}{N}\leqslant\left(\frac{1}{p_{i_1}\cdots p_{i_k}}-\frac{1}{N}\right)^2\leqslant m_{i_1}\cdots m_{i_k}\leqslant\frac{1}{(p_{i_1}\cdots p_{i_k})^2},$$

所以有

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant t}\frac{1}{p_{i_1}^2\cdots p_{i_k}^2}-\frac{2C_t^k}{N}\leqslant\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant t}m_{i_1}\cdots m_{i_k}\leqslant\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant t}\frac{1}{(p_{i_1}\cdots p_{i_k})^2}.$$

从而

$$1-\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{p_i^2}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant t}\frac{1}{p_i^2p_j^2}-\cdots-\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{t}C_t^k\leqslant P(A_{N,t})$$

$$\leqslant 1-\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{p_i^2}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant t}\frac{1}{p_i^2p_j^2}-\cdots+\frac{2\sum_{k=1}^{t}C_t^k}{N}.$$

第二步令 $N\to\infty$ 有

$$\lim_{N\to\infty}P(A_{N,t})=1-\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{p_i^2}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant t}\frac{1}{p_i^2p_j^2}-\cdots+(-1)^t\frac{1}{p_1^2\cdots p_t^2}$$

$$=\prod_{i=1}^{t}\left(1-\frac{1}{p_i^2}\right).$$

从而

$$\lim_{t\to\infty}\left(\lim_{N\to\infty}P(A_{N,t})\right)=\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_i^2}\right)=\frac{6}{\pi^2},$$

并以此值作为所求从全体正整数中独立随机取两数互素的概率.

综上所述,[1] 的讨论缺少新意似乎是多此一举的.

参 考 文 献

[1] 范大茵,可列无限等可能概型概率场的讨论,数学研究与评论,12:3(1992),463—468.

[2] 复旦大学编,概率论第一册,概率论基础,高等教育出版社,1979.

A Note on the paper "On the Probability Field of the Denumerable Equiprobable Scheme"

Feng Cihuang

(Dept. of Math., Hangzhou University, 310028)

Abstract

We give some remarks on the paper[1]a probability field of the scheme which is called as denumerable equiprobable scheme is considered. We think that the problem has solved and there isn't new idea in [1].