第16卷第1期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 1
1996年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1996

样条函数空间的维数级数和基函数*

尹 宝 才
(哈尔滨工业大学计算机系，150001)

摘 要 本文考虑多元样条函数维数级数和基函数的计算. 文[2],[3]中,讨论了通过 $d-1$ 维面上的光滑连接条件,用 Gröbner 基方法计算多元样条函数的维数级数和基函数. 事实上,样条函数的结构可由 $d-2$ 维面上协调方程决定. 本文通过构造合冲序列及 Gröbner 基的性质,推导协调矩阵与维数级数的关系,给出了由协调矩阵的核空间计算样条函数基函数的方法.

关键词 维数级数,遗传复形,Gröbner 基.
分类号 AMS(1991) 41A05/CCL O174.41

1 维数级数和基函数

本文假设剖分 Δ 是遗传的,考虑样条函数空间的维数级数和基函数的计算,导出了通过协调矩阵的象空间的 Hilbert 级数计算样条空间的维数级数的公式.

先介绍定义和符号. 设 Δ 是 R^d 中的 d 维多胞复形,即 R^d 中有限多的 d 维多胞形构成的一个剖分. Δ_i 表示 Δ 中 i 维面的集合,Δ_i^0 表示 Δ 中 i 维内面的集合,$f_i(\Delta)$ 和 $f_i^0(\Delta)$ 分别表示 Δ_i 和 Δ_i^0 中元素个数. $G(\Delta)$ 为由 Δ 决定的图,$G(\Delta)$ 中每点对应于 Δ_d 的元素. 如果 v,v' 是 $G(\Delta)$ 的相对于 $\sigma,\sigma'\in\Delta_d$ 的两个点,则 $\{v,v'\}$ 是 $G(\Delta)$ 的一个边的充要条件是 $\sigma\cap\sigma'\in\Delta_{d-1}$. 如果 $G(\Delta)$ 是连通的,则称 Δ 是强连通的. 如果对任意 $\sigma\in\Delta-\{\varnothing\}$,$\mathrm{st}_\Delta(\sigma)$ 是强连通的,则称 Δ 是遗传的,其中

$$\mathrm{st}_\Delta(\sigma)=\{\tau\in\Delta:\text{存在 }\tau'\in\Delta\text{ 使 }\tau\in\tau',\sigma\in\tau'\}.$$

$S^r(\Delta)$ 是定义在 Δ 上具有 r 阶光滑的样条函数集合,$S_k^r(\Delta)$ 是 $S^r(\Delta)$ 中分片多项式次数不超过 k 次的样条函数集合,$C(\Delta,r)$ 为 $S^r(\Delta)$ 的协调矩阵.

周知样条函数完全由其在所有 $d-1$ 维内面上光滑条件确定,对于遗传复形,则完全由其在所有 $d-2$ 维内面上光滑条件确定,即协调方程确定. 这种带有多项式系数的方程组解可以用 Gröbner 基方法求得,而 $S^r(\Delta)$ 的求解过程正是协调矩阵 $C(\Delta,r)$ 的核空间的计算过程. 对于 Gröbner 基,有如下性质

定理 1.1[3] 设 $G_1,G_2,\cdots,G_s$ 是子模 M 的 Gröbner 基,则集合

$$\Gamma=\{mG_i:m\text{ 是关于变量 }x_1,x_2,\cdots,x_d\text{ 的单式(独项式)},$$

* 1993年12月8日收到. 作者现工作单位:北京工业大学计算机系.

$$且\ G_j\ 的首项不能整除\ mG_i(i \neq j)\ 的首项\}$$

是 M 的一组基.

进一步,$\Gamma_k = \{e \in \Gamma:\mathrm{degree}(e) \leqslant k\}$ 是子模 M 中次数小于 k 的向量空间的一组基. 因此,为计算样条函数空间 $S_k^r(\Delta)$ 的基函数,只需计算 $C(\Delta,r)$ 的核空间一组生成集的 Gröbner 基,就可得到协调因子空间的一组基,进而应用表现定理得到样条空间 $S_k^r(\Delta)$ 的一组基. 如果只计算样条空间 $S_k^r(\Delta)$ 的维数,可得到如下结果

定理 1.2　设 Δ 是单连通区域 D 上的 d 维复形,如果

$$\sum_{k\geqslant 0}\dim S_k^r(\Delta)\lambda^k = p(\lambda)/(1-\lambda)^{d+1},$$

其中 $p(\lambda)$ 是关于 λ 的整系数多项式,则

$$p(\lambda) = 1 + f_{d-1}^0(\Delta)\lambda^{r+1} - P(\mathrm{Im}C(\Delta,r),\lambda),$$

而 $P(\mathrm{Im}C(\Delta,r),\lambda)$ 为 $C(\Delta,r)$ 的象空间 $\mathrm{Im}C(\Delta,r)$ 的 Hilbert 级数的发生函数.

应用定理 1.2,计算样条空间 $S_k^r(\Delta)$ 的维数,只需计算 $C(\Delta,r)$ 的象空间 $\mathrm{Im}C(\Delta,r)$ 的 Hilbert 级数的发生函数,此发生函数可以通过计算 $C(\Delta,r)$ 一个 Gröbner 基得到.

2　异度样条函数的维数级数和基函数

样条空间 $S_k^r(\Delta)$ 在各 $d-1$ 维内面上都是以 r 阶光滑度相连接的,也就是全局 r 阶光滑的. 有些实际问题和理论问题还常要求构造各相邻面之间连接的光滑度不尽相同的样条函数. 如下我们介绍异度样条函数的维数级数和基函数的计算.

定义 2.1　d 维复形 Δ 上的异度样条函数空间 $S^{\vec{r}}(\Delta)$ 由具有如下性质的函数 F 组成

(1)　对每个 $\sigma \in \Delta_d$,F/σ 是 d 维多项式.

(2)　对每个 $\sigma_j \in \Delta_{d-1}^0$,$F/\sigma_j$ 是 r_j 阶连续可微的,其中

$$\vec{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_{f_{d-1}(\Delta)}),\ j = 1,2,\cdots,f_{d-1}(\Delta).$$

这里没有定义其在相交于 $d-1$ 维以下内面上的光滑性,因为它常常受 $d-1$ 维内面上的光滑度的限制. 记 $C(\Delta,\vec{r})$ 为异度样条函数空间 $S^{\vec{r}}(\Delta)$ 的协调矩阵,类似于上节的讨论,异度样条函数空间 $S^{\vec{r}}(\Delta)$ 基函数的计算,可通过计算 $C(\Delta,\vec{r})$ 的核空间一组生成集的 Gröbner 基的方法得到协调因子空间的一组基,进而应用表现定理得到样条空间 $S^{\vec{r}}(\Delta)$ 的一组基. 如果只计算样条空间 $S_k^r(\Delta)$ 的维数,可得到如下结果

定理 2.2　设 Δ 是单连通区域 D 上的 d 维复形,如果

$$\sum_{k\geqslant 0}\dim S_k^{\vec{r}}(\Delta)\lambda^k = p(\lambda)/(1-\lambda)^{d+1},$$

其中 $p(\lambda)$ 是关于 λ 的整系数多项式,则

$$p(\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^{f_{d-1}^0(\Delta)} \lambda^{r_j+1} - P(\mathrm{Im}C(\Delta,\vec{r}),\lambda),$$

而 $P(\mathrm{Im}C(\Delta,\vec{r}),\lambda)$ 为 $C(\Delta,\vec{r})$ 的象空间 $\mathrm{Im}C(\Delta,\vec{r})$ 的 Hilbert 级数的发生函数.

由此已知,异度样条函数的维数级数可通过协调矩阵的象空间的 Hilbert 级数得到,基函数可由协调矩阵核空间的生成集的 Gröbner 基得到.

参 考 文 献

[1] 王仁宏、梁学章，多元函数逼近，科学出版社，1988.

[2] L. J. Billera and L. L. Rose, *Gröbner basis method for multivariate spline*, in Mathematical Methods in Computer Aided Gemetic Design, T. Lyche and L. L. Schumaker. eds., Acadeic Press, New York, 1989, 93—104.

[3] L. J. Billera and L. L. Rose, *A dimension series for multivariate splines*, Discrete Comput Geom, 6 (1991), 107—128.

Dimension Series and Basis Function of Multivariate Spline Space

Yin Baocai

(Harbin Institute of Technology)

Abstract

For a polyhedral subdivision of region in Euclidean d-space, we consider the problem of determining the dimension and a basis for this space, give a computational scheme for obtaining the formal power series $\sum_{k\geqslant 0}\dim S_k^r(\Delta)\lambda^k$ and basis of the space $S_k^r(\Delta)$. Underlying this scheme is the Gröbner basis algorithm of computational commutative algebra and coordinate factor methods. Some algorithms were given for computing the dimension series and basis for different order spline.

Keywords dimension series, hereditary polyhedral complex, Gröbner basis.