第16卷第1期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 1
1996年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1996

关于平面曲线的分形维数*

邓冠铁
(华中理工大学数学系，武汉 430074)

关键词 分形维数，平面曲线，周期函数.
分类号 AMS(1991) 28A80/CCL O174.12

为方便起见，采用如下定义和符号：设 $G\subset R^2$ 为平面上有界非空集，对 $\varepsilon>0$，用 $G(\varepsilon)=\{(x,y)\in R^2:d((x,y),G)\leqslant\varepsilon\}$ 表示集 G 的 ε-平行面，其中 $d((x,y),G)$ 表示点 (x,y) 到集 G 的欧氏距离，用 $|G(\varepsilon)|_2$ 表示闭集 $G(\varepsilon)$ 的二维 Lebesgue 测度，则数

$$\overline{\dim}_B G=2+\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{\log|G(\varepsilon)|_2}{-\log\varepsilon};\underline{\dim}_B G=2+\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{\log|G(\varepsilon)|_2}{-\log\varepsilon}$$

分别称为 G 的上，下 Bouligand 维数[1].

本文主要结果如下：

定理 设 $g(x)$ 在实值线 R 上是以 2π 为周期的，在 $[0,\pi]$ 上单调下降，在 $[\pi,2\pi]$ 上单调上升，$g(0)-g(\pi)=2$，满足常数为 L 的 Lipschit 条件

$$|g(x)-g(x')|\leqslant L|x'-x|,x,x'\in R$$

的连续函数. 设 $\{\lambda_n\}$ 是一列严格递增的正实数列，$\{a_n\}$ 和 $\{\theta_n\}$ 为二列实数列，满足

$$\lambda_{n+1}\geqslant 3\lambda_n;\quad r_n=|a_n|\neq 0\quad(n=1,2,\cdots);$$

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{r_{n+1}\lambda_{n+1}}{r_n\lambda_n}>1;\ \overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty}r_k}{r_n}<1;\lim_{n\to\infty}\frac{\log\lambda_{n+1}}{\log\lambda_n}=1,$$

则由

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n g(\lambda_n x+\theta_n)$$

定义的连续函数 $f(x)$，它在任一长度 $|I|_1>0$ 的区间 I 上的图象 $G(f,I)=\{(x,f(x))\in R^2:x\in I\}$ 满足

$$\overline{\dim}_B G(f,I)=2+\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log r_n}{\log\lambda_n};\underline{\dim}_B G(f,I)=2+\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log r_n}{\log\lambda_n}.$$

证明梗概：可不妨设 $I=[0,1]$；$g(0)=1$；$g(\pi)=-1$；$|g(x)|\leqslant 1$；$r_{n+1}\lambda_{n+1}\geqslant ar_n\lambda_n$；$r_n\geqslant a\sum_{k=n+1}^{+\infty}r_k\geqslant ar_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，其中 $a>1$，为估计 $G(f,I)=G$ 的 $\frac{\pi}{\lambda_n}$-平行面 $G_n=G(\frac{\pi}{\lambda_n})$ 的二维 Lebesgue 测度 $|G_n|_2$，令

* 1993年10月2日收到. 国家自然科学基金资助项目.

$$J(p,n)=[(p-\theta_n)\frac{\pi}{\lambda_n}(p+1-\theta_n)\frac{\pi}{\lambda_n}],$$

$f(x)$ 在 $J(p,n)$ 上的振幅 $|f(J(p,n))|_1$（$|\cdot|_1$ 表示区间的长度）满足

$$|f(J(p,n))|_1\leqslant\sum_{k=1}^{n}r_kL\lambda_k\pi/\lambda_n+\sum_{k=n+1}^{+\infty}|a_k|\leqslant(\frac{aL\pi}{a-1}+\frac{1}{a})r_n.$$

对于下界，注意 $a_ng(\lambda_nx+\theta_n)$ 在 $J(p,n)$ 上单调，振幅为 $2|a_n|$，可不妨设它单调上升. 由于 $\lambda_{n+1}\geqslant 3\lambda_n$，知有一区间 $J(p,n,1)\subset J(p,n)$，它的长度 $|J(p,n,1)|_1=\pi/\lambda_{n+1}$，使得 $a_{n+1}g(\lambda_{n+1}x+\theta_n)$ 在 $J(p,n,1)$ 上单调上升，振幅为 $2|a_{n+1}|$，依次下去，得一区间套 $J(p,n,i)(i=1,2,3,\cdots)$，$a_{n+i}g(\lambda_{n+i}x+\theta_{n+i})$ 在 $J(p,n,i)$ 上单调上升，振幅为 $2|a_{n+i}|$，且 $|J(p,n,i)|=\pi/\lambda_{n+i}$，从而

$$|f(J(p,n)|_1\geqslant|f(J(p,n,i))|_1\geqslant 2|a_{n+i}|-\sum_{k=1}^{n}r_k\lambda_kL\pi/\lambda_{n+i}-\sum_{k=n+i+1}^{+\infty}2|a_k|$$

$$\geqslant|a_{n+i}|(2-\frac{2}{a}-(\frac{1}{a})^i\frac{L\pi a}{a-1}).$$

于是存在不依赖 p 和 n 的常数 $i_0\geqslant 1$ 和 $\varepsilon_0>0$，使得 $|f(J(p,n))|_1\geqslant\varepsilon_0|a_{n+i_0}|$. 从而可知，有不依赖 n 的正常数 $A>1$，使得

$$A^{-1}|a_{n+i_0}|\leqslant|G_n|_2\leqslant A|a_n|.$$

由此可推知定理成立.

参 考 文 献

[1] K. J. Falconer, *Fractal Geometry-Mathematical Foundations and Application*, John Wiley & Sons Ltd., New York, 1990.

On Fractal Dimension of Plane Curve

Deng Guantie

(Huazhong Univ. of Sci & Tech., Wuhan)

Abstract

In this paper, we obtain the fractal dimension of the plane curve of conditinuous function defined by a periodic function series on any interval I with length $|I|_1>0$.

Keywords fractal dimension, plane curve, periodic function.