第16卷第2期　　数学研究与评论　　Vol. 16 No. 2
1996年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1996

具有振动边值的扩散方程Dirichlet问题*

吴冬生　　吴鸿禄
(河北大学数学系，保定071002)

摘　要　本文以上(下)连续函数作为扩散方程

$$u_t=\frac{1}{2}\Delta u+cu \quad 在D内$$

的Dirichlet问题边值函数，讨论了振动边值的Dirichlet问题，并用概率方法证明解的存在性、唯一性和稳定性，把古典Dirichlet问题边值条件减弱到最一般情形.

关键词　扩散方程，振动边值.
分类号　AMS(1991) 60J45/CCL O211.63

Dirichlet问题是物理学中主要边值问题之一，在[1]中，讨论了具有振动边值的调和方程Dirichlet问题，推广了古典Dirichlet问题的结果，本文就扩散方程

$$u_t=\frac{1}{2}\Delta u+cu \quad 在D内 \tag{1}$$

讨论了其具有振动边值的Dirichlet问题，并用概率方法证明解的存在性、唯一性和稳定性，把古典Dirichlet问题边值条件减弱到最一般情形.

在本文中，R^d表d维空间，$\{x(t),t\geqslant 0\}$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的d维标准布朗运动，$\mathscr{F}_t=\sigma\{x(s),s\leqslant t\}$，$P_x$是自$x$出发的布朗运动产生的Wiener测度，$E_x$表关于$P_x$的积分.

由[2]，令$\dot{R}^d$表示$d+1$维欧氏空间. $X=(x,s)$为$\dot{R}^d$中任一点，其中$x\in R^d$，$s\in R^1$为时间坐标，则称过程

$$\{X(t),\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}\equiv\{(x(t),s-t),\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$$

为$\dot{R}^d$上始于X的标准时空布朗运动(SSTBM)，由[2]知，它是一个样本轨道几乎处处连续的强马氏过程. 令P_X,E_X分别表从X出发的SSTBM的概率与数学期望. 设B为$\dot{R}^d$中的Borel集. 定义

$$T_D=\inf\{t>0:X(t)\notin B\}\quad(\inf\varnothing\equiv\infty)$$

为SSTBM首出B的时刻(首出时). $D\subset\dot{R}^d$为有界连通开集. $c\in K_d$(定义见[3])令

$$e(t)=\exp\left(\int_0^t c(X(s))ds\right),\quad t\geqslant 0.$$

在这一部分，均假定在D中$E.(e(T_D))\neq\infty$.

令S_D表示(1)在D内解的全体.

* 1993年5月22日收到. 河北省自然科学基金资助项目.

$$S_D^1 \equiv \{u \in S_D; u \text{ 在 } D \text{ 内有界}\},$$

$$S_D^2 \equiv \{u \in S_D; \exists\, u_n \in S_D^1, \text{使 } u_n \uparrow u\},$$

$$S_D^3 \equiv \{u \in S_D; \exists\, u_i \in S_D^1, a_i \in R^1, \text{使 } u = a_1u_1 + a_2u_2\},$$

显然有 $S_D^1 \subset S_D^2 \subset S_D^3 \subset S_D$.

引理 1 设 D 为 R^d 中有界连通开集，φ 是 ∂D 上的下连续函数. $\forall X \in D$，$E_X(e(T_D)|\varphi(X(T_D))|) < \infty$，则 $u = E.(e(T_D)\varphi(X(T_D)))$ 是 S_D^3 中满足下面条件的最小解

$$\varliminf_{D \ni X \to b} u(X) = \varphi(b) \quad b \in (\partial D \backslash N) \cap (D^c)^r, \tag{2}$$

其中 N 是 H_D- 零集，D^c 表 D 余集，$(D^c)^r$ 表 D^c 规则点全体(定义见[5]).

证明 由[4]知：$u \in S_D^3$. 下证(2)式，因 ∂D 是 R^d 中紧集. φ 是 ∂D 上的下连续函数. 故存在一列有界连续函数 $\{\varphi_n\}$，$\varphi_n \uparrow \varphi (n \to \infty)$ 对任意 $n \geqslant 1$ 考虑广义 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{1}{2}\Delta u + cu, & X \in D, \\ \lim\limits_{D \ni X \to b} u(X) = \varphi_n(b), & b \in \partial D \cap (D^c)^r, \end{cases}$$

则由[3]，它有唯一有界解 $u_n(X) = E_X(e(T_D)\varphi_n(X(T_D)))$. 由单调收敛定理 $u_n \uparrow u (n \to \infty)$，故 $\forall b \in \partial D \cap (D^c)^r$，

$$\varliminf_{D \ni X \to b} u(X) = \varliminf_{D \ni X \to b} \lim_{k \to \infty} u_n(X) \geqslant \lim_{k \to \infty} \varliminf_{D \ni X \to b} u(X) = \varphi(b). \tag{3}$$

又由[4]，$u = E.(e(T_D)\varphi(X(T_D)))$ 是下述随机 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{1}{2}\Delta u + cu, & X \in D, \\ \lim\limits_{t \uparrow T_D} u(X(t)) = \varphi(X(T_D)), & \text{a.s.} P_X \end{cases} \tag{4}$$

在 S_D^3 内的唯一解，对每个固定 $X \in D$，令

$$\Omega_X = \{\omega \in \Omega: X(0,\omega) = X, \lim_{t \uparrow T_D} u(X(t)) = \varphi(X(T_D))\}.$$

由(4)式：$P_X(\Omega_X) = 1$，再设

$$\partial D_X = \{X(T_D): \omega \in \Omega_X\}, \quad X \in D,$$

则由 SSTBM 轨道连续性，$\partial D_X \subset \partial D$，由(4)

$$H_D(X, \partial D_X) = P_X(X(T_D) \in \partial D_X) = 1.$$

从而，令 $N_X = \partial D \backslash \partial D_X$，则

$$H_D(X, N_X) = 0.$$

于是，由[1]，N_X 是 H_D- 零集. 设

$$N = \bigcap_{X \in D} N_X, \tag{5}$$

则 N 是 H_D- 零集.

因 $b \in \partial D \backslash N$，由(5)，存在 $X_0 \in D$，使 $b \in \partial D \backslash N_{X_0}$ 且存在 $\omega_b \in \Omega_{X_0}$，使 $X(T_D(\omega_b), \omega_b) = b$. 由(4)式

$$\lim_{t \uparrow T_D(\omega_b)} u(X(t, \omega_b)) = \varphi(X(T_D(\omega_b), \omega_b)) = \varphi(b),$$

即有

$$\varlimsup_{D \ni X \to b} u(X) \leqslant \varphi(b), \quad b \in \partial D \setminus N. \tag{6}$$

由(3),(6)即证得(2)式.

假设另有 $\tilde{u} \in S_D^3$ 满足(2),则有

$$\lim_{t \uparrow T_D} \tilde{u}(X(t)) \geqslant \varphi(X(T_D)) \quad \text{a.s.} P_X, \quad X \in D.$$

由[4],对 $\forall\ X \in D$

$$\tilde{u}(X) = E_X(e(T_D) \lim_{t \uparrow T_D} \tilde{u}(X(t))) \geqslant E_X(e(T_D)\varphi(X(T_D))) = u(X),$$

即证明了 u 的最小性.

引理 2 设 D 是有界连通开集,φ是 ∂D 上的连续函数,$\forall\ X \in D$,$E_X(e(T_D)|\varphi(X(T_D))|) < \infty$,则 $u = E.(e(T_D)\varphi(X(T_D)))$ 是 S_D^2 中满足下面条件的最大解:

$$\overline{\lim_{D \ni X \to b}} u(X) = \varphi(b), \quad b \in (\partial D \setminus N) \cap (D^c)^r. \tag{7}$$

证明 类似于引理 1.

设 $u \in S_D$,则 $\varphi_*(b) = \underline{\lim}_{D \ni X \to b} u(X)$ 是 ∂D 上的下连续函数. $\varphi^*(b) = \overline{\lim}_{D \ni X \to b} u(X)$ 是 ∂D 上的上连续函数,且 $\varphi_* \leqslant \varphi^*$.

引理 3 设 ∂D 上函数 φ满足对 $\forall\ X \in D$,有 $E_X(e(T_D)|\varphi(X(T_D))|) < \infty$ 且有下界,则

(i) 对任 H_D- 零集 N ,存在 ∂D 上最大下连续函数 φ_* ,使

$$\varphi_*(b) \leqslant \varphi(b), \quad b \in \partial D \setminus N, \tag{8}$$

亦即对满足(8)的下连续函数 φ_{**} ,有

$$\varphi_{**} \leqslant \varphi_*. \tag{9}$$

(ii) $u_* = E.(e(T_D)\varphi_*(X(T_D))) \in S_D^3$, $u = E.(e(T_D)\varphi(X(T_D))) \geqslant u_*$,而且

$$\underline{\lim}_{D \ni X \to b} u(X) = \varphi_*(b), \quad b \in \partial D \setminus N_*) \cap (D^c)^r, \tag{10}$$

其中 N_* 是 H_D- 零集.

证明 (i) 类同于文[1]中引理 6(i) 的证明.

(ii) 由 $\forall\ X \in D$,$E_X(e(T_D)|\varphi(X(T_D))|) < \infty$ 及[1]中(12)式有:$\forall\ X \in D$

$$E_X(e(T_D)|\varphi_*(X(T_D))|) < \infty.$$

由[4]中定理 $u_* = E.(e(T_D)\varphi_*(X(T_D))) \in S_D^3$ 且

$$u \geqslant u_* \tag{11}$$

令 $\tilde{\varphi}_*(b) = \underline{\lim}_{D \ni X \to b} u(X)(b \in \partial D)$,则 $\tilde{\varphi}_*$是 ∂D 上的下连续函数,由(11)及引理 1,$\exists$ H_D-零集 N_*,使

$$\tilde{\varphi}_*(b) \geqslant \varphi_*(b), \quad b \in (\partial D \setminus N_*) \cap (D^c)^r, \tag{12}$$

另一方面,$u = E.(e(T_0)\varphi(X(T_D)))$是随机 Dirichlet 问题(4)的解,从而

$$\lim_{t \uparrow T_D} u(X(t)) = \varphi(X(T_D)) \quad \text{a.s.} P_X, \quad X \in D.$$

因此有

$$\tilde{\varphi}_*(X(T_D)) \leqslant \varphi(X(T_D)) \quad \text{a.s.} P_X, \quad X \in D.$$

由(i) 立知 $\tilde{\varphi}_* \leqslant \varphi_*$,又由(11) 式得

$$\tilde{\varphi}_*(b) = \varphi_*(b), \quad b \in (\partial D \setminus N_*) \cap (D^c)^r,$$

即证得(ii).

引理 4 设 ∂D 上函数 φ 满足对 $\forall X \in D$, 有 $E_X(e(T_D)|\varphi(X(T_D))|) < \infty$, 且有上界, 则

(i) 对任 H_D- 零集 N, 存在 ∂D 最小上连续函数 φ^*, 使

$$\varphi^*(b) \geqslant \varphi(b), \quad b \in \partial D \backslash N, \tag{13}$$

亦即对任满足(13)式的上连续函数 φ^{**}, 有

$$\varphi^{**} \geqslant \varphi^*. \tag{14}$$

(ii) $u^* = E.(e(T_D)\varphi^*(X(T_D))) \in S_D^3$, $u = E.(e(T_D)\varphi(X(T_D))) \leqslant u^*$ 且

$$\overline{\lim_{D \ni X \to b}} u(X) = \varphi^*(b), \quad b \in (\partial D \backslash N^*) \cap (D^c)^r, \tag{15}$$

其中 N^* 为 H_D- 零集.

证明类似于引理 3.

有了上述准备, 讨论具振动边值的扩散方程的 Dirichlet 问题, 对于 $u \in S_D$, 它在边界上可以 不连续, 甚至不存在极限, 但是上(下) 极限必存在, 且是 ∂D 上的上(下) 连续函数. 因此, 上(下) 连续函数是 Dirichlet 问题最广泛最自然的边界函数. 下面我们就以上(下) 连续函数作为扩散方程 Dirichlet 问题的边值函数, 用概率方法证明其解的存在性、唯一性和稳定性. 为此引入

定义 1 ∂D 上的有界函数 φ_1, φ_2 称为一个半连续函数对, 若

(i) $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$,

(ii) φ_1 是小于等于 φ_2 的最大下连续函数, φ_2 是大于等于 φ_1 的最小上连续函数.

由[1], 可知有界半连续函数对一定存在.

定义 2 设已给 ∂D 上两可测函数 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1 \leqslant \varphi_2$, 求 D 内函数 $u \in S_D$, 使对 $\forall b \in (\partial D \backslash N) \cap (D^c)^r$(其中 N 是 H_D- 零集), 同时满足以下两个边界条件

$$\begin{cases} \underline{\lim}_{D \ni X \to b} u(X) = \varphi_1(b), b \text{ 是 } \varphi_1 \text{ 的下连续点}, & (16) \\ \overline{\lim}_{D \ni X \to b} u(X) = \varphi_2(b), b \text{ 是 } \varphi_2 \text{ 的上连续点}, & (17) \end{cases}$$

则称此问题为具有振动边值 (φ_1, φ_2) 的扩散方程 Dirichlet 问题.

定理 1 (存在性) 设 D 为 R^d 内有界连通开集 φ_1, φ_2 是 ∂D 上有界半连续函数对, 则具有振动边值 (φ_1, φ_2) 的扩散方程 Dirichlet 问题 S_D^3 内有最小解 $E.(e(T_D)\varphi_1(X(T_D)))$, 最大解 $E.(e(T_D)\varphi_2(X(T_D)))$, 而且对 ∂D 上可测函数 φ, 只要有 $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, 则有 $E.(e(T_D)\varphi(X(T_D)))$ 也是具有振动边值 (φ_1, φ_2) 的扩散方程的 Dirichlet 问题的解.

证明 由已知, φ_1, φ_2 有界可测. 从而有:

$$E.(e(T_D)\varphi_1(X(T_D))) \in S_D^3, E.(e(T_D)\varphi_2(X(T_D))) \in S_D^3,$$

又由引理 1 知 $E.(e(T_D)\varphi_1(X(T_D)))$ 是满足(16) 的最小者, 由引理 4 知 $E.(e(T_D)\varphi_1(X(T_D)))$ 满足(17), 故知 $E.(e(T_D)\varphi_1(X(T_D)))$ 是具有振动边值 (φ_1, φ_2) 的扩散方程 Dirichlet 问题的最小解. 同理, 由引理 2, 引理 3 知道 $E.(e(T_D)\varphi_2(X(T_D)))$ 是具振动边值 (φ_1, φ_2) 的扩散方程 Dirichlet 问题的最大解, 又利用不等式

$$E.(e(T_D)\varphi_1(X(T_D))) \leqslant E.(e(T_D)\varphi(X(T_D))) \leqslant E.(e(T_D)\varphi_2(X(T_D)))$$

知 $E.(e(T_D)\varphi(X(T_D)))$ 亦是具有振动边界值 (φ_1, φ_2) 的扩散方程 Dirichlet 问题的解.

在定理 1 中,取 $\varphi=\bar{\varphi}=\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)$,则知 $E.(e(T_D)\bar{\varphi}(X(T_D)))$ 是具振动边值 (φ_1,φ_2) 的扩散方程 Dirichlet 问题的解. 由于

$$E.(e(T_D)\bar{\varphi}(X(T_D)))=\frac{1}{2}[E.(e(T_D)\varphi_1(X(T_D)))+E.(e(T_D)\varphi_2(X(T_D)))],$$

故称 $E.(e(T_D)\bar{\varphi}(X(T_D)))$ 为其中值解.

下面的唯一性定理是显然的.

定理 2 在定理 1 条件下,具有振动边值 (φ_1,φ_2) 的扩散方程 Dirichlet 问题在 S_D^3 内的最小解、最大解、中值解都是唯一的.

特别,$\varphi_1=\varphi_2$ 时,关于 (φ_1,φ_2) 的扩散方程 Dirichlet 问题在 S_D^3 内最大解、最小解都重合为一式 $E.(e(T_D)\varphi_1(X(T_D)))$,这就是扩散方程广义 Dirichlet 问题的唯一解(此时,(16),(17) 重合为一式). 因此具有振动边值 Dirichlet 问题是广义 Dirichlet 问题的推广.

定理 3 (稳定性) 设 (φ_1,φ_2) 及 (φ_1',φ_2') 分别是 ∂D 两个半连续函数时,则对 $\varepsilon>0$,∃ $\delta>0$,只要 $|\varphi_1-\varphi_1'|<\delta$,$|\varphi_2-\varphi_2'|<\delta$,就有

$$|E.(e(T_D)\varphi_1(X(T_D)))-E.(e(T_D)\varphi_1'(X(T_D)))|<\varepsilon,$$
$$|E.(e(T_D)\varphi_2(X(T_D)))-E.(e(T_D)\varphi_2'(X(T_D)))|<\varepsilon.$$

证明 由于 $E.(e(T_D))>0$,故对 $\forall\ \varepsilon>0$,取 $0<\delta\leqslant\frac{\varepsilon}{E.(e(T_D))}$,当 $|\varphi_i-\varphi_i'|<\delta$,有

$$|E.(e(T_D)\varphi_i(X(T_D)))-E.(e(T_D)\varphi_i'(X(T_D)))|<\varepsilon\quad(i=1,2),$$

它说明具振动边值的扩散方程的最小解、最大解及中值解都是稳定的.

利用上面结果,还可给出扩散方程广义 Dirichlet 问题存在唯一解的判别准则.

定理 4 设 φ 是 ∂D 上有界可测函数,则扩散方程的广义 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}u_t=(\frac{1}{2}\Delta+c)u(X),X\in D,\\ \lim\limits_{D\ni X\to b}u(X)=\varphi(b),\quad b\in(\partial D\backslash N)\cap(D^c)^r,b\text{ 是 }\varphi\text{连续点}\end{cases}$$

(N 为 H_D- 零集) 在 S_D^3 内存在唯一解的充要条件是 φ 在 ∂D 上本质连续.

证明 由[3] 知,充分性显然成立. 下证必要性,我们用反证法,令 $A=\{b\in\partial D:\varphi\text{在 } b \text{ 不连续}\}$. 若 φ 不本质连续,则 $H_D(X,A)>0,\forall\ X\in D$. 定义

$$\varphi_*(b)=\varphi(b)\wedge\varliminf_{\substack{a\to b\\ a\in\partial D}}\varphi(a),\quad b\in\partial D,$$

$$\varphi^*(b)=\varphi(b)\vee\varlimsup_{\substack{a\to b\\ a\in\partial D}}\varphi(a),\quad b\in\partial D,$$

则有 φ_*,φ^* 分别是 ∂D 上的有界的下连续函数和上连续函数,且 $\varphi_*\leqslant\varphi\leqslant\varphi^*$,又由 φ 的连续性

$$\varphi^*(b)-\varphi_*(b)=0,\text{当且仅当 } b\notin A.$$

注意到 $H_D(X,A)>0$,故有

$$E.(e(T_D)\varphi^*(X(T_D)))>E.(e(T_D)\varphi_*(X(T_D)))$$

由引理 1,存在 H_D- 零集 N_* 使

$$\varliminf_{D\ni X\to b}E_X(e(T_D)\varphi_*(X(T_D)))=\varphi_*(b),\quad b\in(\partial D\backslash N_*)\cap(D^c)^r.$$

特别当 $b\in(\partial D\backslash N_*)\cap(D^c)^r\cap(\partial D\backslash A)$ 时有

$$\lim_{D \ni X \to b} E_X(e(T_D)\varphi_*(X(T_D))) = \varphi_*(b) = \varphi(b).$$

同理,应用引理 2,存在 H_D-零集 N^*,使

$$\overline{\lim_{D \ni X \to b}} E_X(e(T_D)\varphi^*(X(T_D))) = \varphi^*(b) = \varphi(b).$$

因此,取 $N = N^* \cup N_*$,N 亦是 H_D-零集,则当 $b \in (\partial D \backslash N) \cap (D^c)^r \cap (\partial D \backslash A)$ 时,有

$$\lim_{D \ni X \to b} E_X(e(T_D)\varphi_*(X(T_D))) = \lim_{D \ni X \to b} E_X(e(T_D)\varphi^*(X(T_D))) = \varphi(b).$$

这说明 $E.(e(T_D)\varphi_*(X(T_D)))$ 和 $E.(e(T_D)\varphi^*(X(T_D)))$ 都是扩散方程广义 Dirichlet 问题(18)的解,这与解的唯一性矛盾,即知 φ 在 ∂D 上本质连续.

参 考 文 献

[1] 李志阐, Dirichlet 问题的推广, 数学物理学报, Vol. 4, No. 3, 1984.

[2] J. L. Doob, *Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[3] Z. C. Li and Q. J. Yang, *The Dirichlet Problem for Diffusion Equation*, Chin. Ann. of Math., 10B (3), 1989.

[4] 吴冬生, 扩散方程广义解的规则性, 河北大学学报, 14(3), 1994.

[5] S. C. Port and C. J. Stone, *Brownian Motion and Classical Potential Theory*, New York, Academic Press, 1978.

Vibration Boundary Value of the Dirichlet Problem for Diffusion Equation

Wu Dongsheng *Wu Honglu*

(Dept. of Math., Hebei University, Baoding 071002)

Abstract

In this paper, the upper(lower) semicontinuous function is assumed to be the boundary value function of the Dirichlet problem for diffusion equation

$$u_t = \frac{1}{2}\Delta u + cu, \quad \text{in } D$$

where D is a bounded open connected subset of R^d. Vibration boundary value is discussed for the Dirichlet problem for diffusion equation. Using probability methods, we obtained the eaistence, uniqueness and stability of the solution.

Keywords diffusion equation, vibration boundary value.