第16卷第2期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 2
1996年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1996

线性Volterra系统V泛函的构造及其应用*

杨善松 张宗达
(哈尔滨工业大学数学系，哈尔滨 150006)

摘 要 V泛函的构造是讨论Volterra积分微分系统稳定性的关键. 近十年来，不少作者[1]-[4]在Liapunov泛函构造方面作了不少努力，但对一般的线性Volterra系统，还是没有构造Liapunov泛函通用而有效的方法. 本文通过具体求解一个线性偏微分方程的方法来确定V泛函，得到了更广泛的Liapunov泛函以及变号V泛函. 同时，利用这些V泛函对线性Volterra系统的实用稳定性与Liapunov稳定性作了讨论.

关键词 线性Volterra系统，V泛函，Liapunov泛函，实用稳定性，Liapunov稳定.
分类号 AMS(1991) 34D/CCL O1751.13

一 预备知识

考虑线性Volterra系统

$$x'(t)=A(t)x(t)+\int_0^t C(t,s)x(s)ds+p(t), \tag{1}$$

$$x'(t)=A(t)x(t)+\int_0^t C(t,s)x(s)ds, \tag{2}$$

其中$A(t)\in C[R_+,R^{n\times n}]$，$p(t)\in C[R_+,R^n]$，$C(t,s)$为$n\times n$在$0\leqslant s\leqslant t<+\infty$上连续的矩阵函数($R_+=[0,+\infty)$，$R^n$为$n$维欧氏空间，$R^{n\times n}$为$R$上全体$n\times n$阶矩阵的集合).

对给定的常数$\alpha>0$，以及R_+上的连续可微的函数$\beta(t)>0$，本文始终假设$\beta(\theta)\geqslant\alpha(\theta\in[0,t_0])$，规定区域：

$$S_\alpha=\{x\in R^n\mid \|x\|<\alpha\},S_{\beta(t)}=\{x\in R^n\mid\|x\|<\beta(t)\},$$

这里，$\|\cdot\|$为R^n中任一范数.

记$T(i)$为初始时刻的集合，t_0为初始时刻，即$t_0\in T(i)$，$T_0=[t_0,\tau]$，其中τ是常数，也可为$+\infty$，此时，$T_0=[t_0,+\infty)$. 记$\partial S_{\beta(t)}$为$S_{\beta(t)}$的边界. $x(t;t_0,\varphi)$为系统(1)(或(2))的解，满足$x(\theta)=\varphi(\theta)(\theta\in[0,t_0])$，$\varphi\in C[0,t_0]$. 给出如下实用稳定性的定义.

定义1 对于$t_0\in T(i)$，如果当$\varphi\in C[0,t_0]$，$\varphi(\theta)\in S_\alpha(\theta\in[0,t_0])$时，有$x(t;t_0,\varphi)\in S_{\beta(t)}(t\in T_0)$，则称系统(1)(或(2))关于$\{S_\alpha,S_{\beta(t)},T(i),T_0,t_0\}$实用稳定.

定义2 对于$\forall\ t_0\Rightarrow T(i)$，如果当$\varphi\in C[0,t_0]$，$\varphi(\theta)\in S_\alpha(\theta\in[0,t_0])$时，都有$x(t;t_0,\varphi)\in S_{\beta(t)}(t\in T_0)$，则称系统(1)(或(2))关于$\{S_\alpha,S_{\beta(t)},T(i)\}$实用一致稳定.

* 1993年1月3日收到.

关于 Liapunov 稳定性的定义，请参见文[1].

本文还要用到如下的定义.

定义 3 矩阵 $A(t)$ 的矩阵测度 $\mu(A(t))$ 定义为

$$\mu(A(t)) = \lim_{h\to 0^+}\sup h^{-1}[\,\|I + hA(t)\| - 1].$$

引理 设 $V(t), M(t), N(t) \in C[T_0, R]$, $\beta(t) \in C^1[T_0, R]$ 满足

1) $D^+V(t) \leqslant M(t)\cdot V(t) + N(t)$, $t \in T_0$;

2) $\beta'(t) \geqslant M(t)\cdot\beta(t) + N(t)$, $t \in T_0$;

3) $V(t_0) < \beta(t_0)$,

则 $V(t) < \beta(t)$, $t \in T_0$.

证明 反证法. 若结论不成立，则$\exists\ t_1 > t_0$，使得 $V(t_1) = \beta(t_1)$，且 $V(t) < \beta(t)\,(t \in [t_0, t_1))$. 从而，由条件 1),2),

$$D_+[\beta(t) - V(t)] = \beta'(t) - D^+V(t) \geqslant M(t)[\beta(t) - V(t)],\ t \in (t_0, t_1).$$

考虑比较方程：

$$\begin{cases} z'(t) = M(t)z(t),\ t \in [t_0, t_1), \\ z(t_0) = \beta(t_0) - V(t_0) > 0, \end{cases}$$

由常微分方程的比较原理[5]，有

$$\beta(t) - V(t) \geqslant z(t) = z(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} M(s)ds\right) > 0,\ t \in [t_0, t_1].$$

这与假设 $\beta(t_1) = V(t_1)$ 矛盾，引理得证.

注 在引理中，$D^+V(t)$, $D_+V(t)$ 分别为 $V(t)$ 的右上、右下导数.

下面，就两种不同类型的 V 泛函的构造及其应用分别加以讨论. 由于篇幅有限，对后一种类型，仅给出 Liapunov 泛函的构造及其在实用稳定性上的应用. 另外，采用本文的方法，还可以讨论形如 $V(t, x(\cdot)) = \|x(t)\|^2 + \int_0^t \Phi(t,s)\|x(s)\|^2 ds$ 以及 $V(t, x(\cdot)) = x^T(t)B(t)x(t) + \int_0^t \Phi(t,s)\|x(s)\|^2 ds$ 的 V 泛函的构造.

二 $V_1(t, x(\cdot)) = \|x(t)\| + \int_0^t \Phi(t,s)\|x(s)\|ds$ 情形

根据矩形测度的定义，

$$\begin{aligned} D^+_{(1)}\|x(t)\| &= \lim_{h\to 0^+}\sup h^{-1}[\,\|x(t+h)\| - \|x(t)\|\,] \\ &\leqslant \lim_{h\to 0^+}\sup h^{-1}[\,\|x(t) + h\dot{x}(t)\| - \|x(t)\|\,] \\ &\leqslant \lim_{h\to 0^+}\sup h^{-1}[\,\|I + hA(t)\| - 1]\,\|x(t)\| + \left\|\int_0^t C(t,s)x(s)ds + p(t)\right\| \\ &\leqslant \mu(A(t))\|x(t)\| + \int_0^t \|C(t,s)\|\,\|x(s)\|ds + \|p(t)\|. \end{aligned} \tag{3}$$

从而

$$D^+_{(1)}V_1(t,x(\cdot)) \leqslant [\mu(A(t)) + \Phi(t,t)]\|x(t)\|$$
$$+ \int_0^t [\partial\Phi(t,s)/\partial t + \|C(t,s)\|]\|x(s)\|ds + \|p(t)\|. \tag{4}$$

对(4)式右边,若能放大成 t 与 V_1 的函数 $\omega(t,V_1)$,即

$$D^+_{(1)}V_1(t,x(\cdot)) \leqslant \omega(t,V_1(t,x(\cdot))).$$

那么,就可以采用比较方法来讨论(1)的实用稳定性与(2)的 Liapunov 稳定性. 为此,令

$$\|C(t,s)\| + \partial\Phi(t,s)/\partial t \leqslant k(t)\Phi(t,s),$$

但考虑到 $\Phi(t,s)$的确定性,取等式,即令 $\Phi(t,s)$满足如下的偏微分方程:

$$\begin{cases}\|C(t,s)\| + \partial\Phi(t,s)/\partial t = k(t)\Phi(t,s),\ 0\leqslant s\leqslant t<+\infty,\\ \Phi(t,t) = \varphi_0(t),\end{cases} \tag{5}$$

其中 $k(t)$任意,$\varphi_0(t)$待定. 这样,(4)化为

$$D^+_{(1)}V_1(t,x(\cdot)) \leqslant [\mu(A(t)) + \varphi_0(t)]\|x(t)\|$$
$$+ k(t)\cdot\int_0^t \Phi(t,s)\|x(s)\|ds + \|p(t)\|. \tag{6}$$

解方程(5),得

$$\Phi(t,s) = \exp\left(\int_s^t k(\tau)d\tau\right)\left[\varphi_0(s) - \int_s^t \|C(u,s)\|\exp\left(-\int_s^u k(\tau)d\tau\right)du\right],$$
$$0\leqslant s\leqslant t<+\infty. \tag{7}$$

下面,就 $\Phi(t,s)$是否具有非负性分别加以讨论.

(I) Liapunov 泛函的构造

为了保证 $V_1(t,x(\cdot))$的正定性,只须 $\Phi(t,s)\geqslant 0$,由(7),有

$$\varphi_0(s) \geqslant \int_s^t \|C(u,s)\|\exp\left(-\int_s^u k(\tau)d\tau\right)du,\ 0\leqslant s\leqslant t<+\infty,$$

令 $t\to+\infty$,得

$$\varphi_0(s) \geqslant \int_s^{+\infty} \|C(u,s)\|\exp\left(-\int_s^u k(\tau)d\tau\right)du,\ s\geqslant 0.$$

取

$$\varphi_0(s) = \int_s^{+\infty} \|C(u,s)\|\exp\left(-\int_s^u k(\tau)d\tau\right)du,\ s\geqslant 0,$$

这时,

$$\Phi(t,s) = \exp\left(\int_s^t k(\tau)d\tau\right)\cdot\int_t^{+\infty}\|C(u,s)\|\exp\left(-\int_s^u k(\tau)d\tau\right)du$$
$$= \int_t^{+\infty}\|C(u,s)\|\exp\left(-\int_t^u k(\tau)d\tau\right)du,\ 0\leqslant s\leqslant t<+\infty, \tag{8}$$

其中 $k(t)$为任意连续正数. 因此

$$V_1(t,x(\cdot)) = \|x(t)\| + \int_0^t\int_t^{+\infty}\|c(u,s)\|\exp\left(-\int_t^u k(\tau)d\tau\right)du\cdot\|x(s)\|ds, \tag{9}$$

而

$$D^+_{(1)}V_1(t,x(\cdot))$$
$$\leqslant \max\{\mu(A(t)) + \varphi_0(t),k(t)\}\left[\|x(t)\| + \int_0^t\Phi(t,s)\|x(s)\|ds\right] + \|p(t)\|$$

$$= \max\{\mu(A(t)) + \int_t^{+\infty} \|C(u,t)\| \exp(-\int_t^u k(\tau)d\tau)du, k(t)\}$$
$$\cdot V_1(t,x(\cdot)) + \|p(t)\|. \tag{10}$$

（Ⅱ） **变号 V 泛函的构造**

考虑到(6)式在 $\Phi(t,s)$不具有非负性情形下的放大问题，取(5)的初值为

$$\varphi_0(t) = k(t) - \mu(A(t)),$$

则有

$$\Phi(t,s) = [k(s) - \mu(A(s))]\exp(\int_s^t k(\tau)d\tau)$$
$$- \int_s^t \|C(u,s)\| \exp(\int_u^t k(\tau)d\tau)du, \ 0 \leqslant s \leqslant t < +\infty, \tag{11}$$

其中 $k(t)$为任意连续函数. 这时，

$$V_1(t,x(\cdot)) = \|x(t)\| + \int_0^t \{[k(s) - \mu(A(s))]\exp(\int_s^t k(\tau)d\tau)$$
$$- \int_s^t \|C(u,s)\| \exp(\int_u^t k(\tau)d\tau)du\} \|x(s)\| ds, \tag{12}$$

而

$$D^+_{(1)}V_1(t,x(\cdot)) \leqslant k(t)[\|x(t)\| + \int_0^t \Phi(t,s)\|x(s)\|ds] + \|p(t)\|$$
$$= k(t)\cdot V_1(t,x(\cdot)) + \|p(t)\|. \tag{13}$$

利用 Liapunov 泛函(9)与变号 V 泛函(12)，可得如下结果.

定理 1 对系统(1)，若存在 $k(t) \in C[T_0, R]$，使得

(i) $m(t)\beta(t) + \|p(t)\| \leqslant \beta'(t)$, $t \in T_0$;

(ii) $\alpha[1 + \int_0^{t_0} \Phi(t_0,s)ds] \leqslant \beta(t_0)$,

这里 $m(t) = \max\{\mu(A(t)) + \Phi(t,t), k(t)\}$，$\Phi(t,s)$由(8)给出，则系统(1)关于$\{S_\alpha, S_{\beta(t)}, T_0, t_0\}$实用稳定.

证明 作 Liapunov 泛函

$$V_1(t,x(\cdot)) = \|x(t)\| + \int_0^t \Phi(t,s)\|x(s)\|ds.$$

由(10)，有

$$D^+_{(1)}V_1(t,x(\cdot)) \leqslant m(t)\cdot V_1(t,x(\cdot)) + \|p(t)\|, \ t \in T_0.$$

又由定理条件(ii)，对$\forall\ \varphi(\theta) \in S_\alpha (\theta \in [0,t_0])$，

$$V_1(t_0,x(\cdot)) = \|\varphi(t_0)\| + \int_0^{t_0} \Phi(t_0,s)\|\varphi(s)\|ds < \alpha[1 + \int_0^{t_0}\Phi(t_0,s)ds] \leqslant \beta(t_0).$$

根据引理，

$$\|x(t)\| \leqslant V_1(t,x(\cdot)) \leqslant \beta(t), \ t \in T_0,$$

故系统(1)关于$\{S_\alpha, S_{\beta(t)}, T_0, t_0\}$实用稳定.

定理 2 对系统(1)，若对$\forall\ t_0 \in T(i)$，都存在 $k_{t_0} \in C[T_0, R)$，使得定理 1 的条件均成立，则系统(1)关于$\{S_\alpha, S_{\beta(t)}, T(i)\}$实用一致稳定.

定理 3 若存在 $k(t) \in C[T_0, R]$，使得方程

$$\begin{cases} u'(t) = k(t)u(t) + \| p(t) \|, \ t \in T_0, \\ u(t_0) = [1 + \int_0^{t_0} \Phi^+(t_0,s)ds]\alpha \end{cases} \tag{14}$$

的解 $u(t)$ 满足：

$$u(t) \leqslant \beta(t) + \int_0^t \Phi^-(t,s)\beta(s)ds, \ t \in T_0, \tag{15}$$

其中

$$\Phi^+(t,s) = \max\{\Phi(t,s), 0\}, \tag{16}$$

$$\Phi^-(t,s) = \min\{\Phi(t,s), 0\}, \tag{17}$$

而 $\Phi(t,s)$ 由(11)式给出，则系统(1)关于 $\{S_\alpha, S_{\beta(t)}, T_0, t_0\}$ 实用稳定.

证明 反证法. 假设结论不成立，则 $\exists\ t_1 > t_0$，使得 $x(t_1) \in \partial S_{\beta(t_1)}$，且 $x(t) \in S_{\beta(t)}$ $(t \in [0, t_1))$. 作 V 泛函：

$$V_1(t, x(\cdot)) = \| x(t) \| + \int_0^t \Phi(t,s) \| x(s) \| ds,$$

其中 $\Phi(t,s)$ 由(11)给出，则由(13)，

$$D^+_{(1)} V_1(t, x(\cdot)) \leqslant k(t) V_1(t, x(\cdot)) + \| p(t) \|, \ t \in T_0. \tag{18}$$

又对 $\forall\ \varphi(\theta) \in S_\alpha (\theta \in [0, t_0])$，

$$V_1(t_0, x(\cdot)) = \| \varphi(t_0) \| + \int_0^{t_0} \Phi(t_0,s) \| \varphi(s) \| ds < [1 + \int_0^{t_0} \Phi^+(t_0,s)ds]\alpha = u(t_0).$$

故由(15)，(18)，根据引理，

$$V_1(t, x(\cdot)) < u(t) \leqslant \beta(t) + \int_0^t \Phi^-(t,s)\beta(s)ds, \ t \in T_0. \tag{19}$$

但由假设，

$$V_1(t_1, x(\cdot)) = \| x(t_1) \| + \int_0^{t_1} \Phi(t_1,s) \| x(s) \| ds \geqslant \beta(t_1) + \int_0^{t_1} \Phi^-(t_1,s)\beta(s)ds,$$

这与(19)式矛盾. 定理得证.

定理 4 对某 $k(t) \in C[T_0, R]$，记

$$m(t) = \max\{\mu(A(t)) + \int_t^{+\infty} \| C(u,t) \| \exp(-\int_t^u k(\tau)d\tau)du, k(t)\},$$

则有如下结论：

(i) $\int_{t_0}^t m(s)ds \leqslant M(t_0) = \text{const}, \ (t \geqslant t_0 \geqslant 0)$；

(ii) $\int_{t_0}^{+\infty} m(s)ds = -\infty$；

(iii) $\int_{t_0}^t m(s)ds \leqslant M = \text{const}, (t \geqslant t_0 \geqslant 0)$，且

$$\int_0^t \int_t^{+\infty} \| C(u,s) \| \exp(-\int_t^u k(\tau)d\tau)duds \leqslant M_1 = \text{const}, \ (t \geqslant 0);$$

(iv) $\int_{t_0}^t m(s)ds \to -\infty$ (关于 t_0)(当 $t - t_0 \to +\infty$)，且

$$\int_0^t\int_t^{+\infty}\|C(u,s)\|\exp(-\int_t^u k(\tau)d\tau)duds\leqslant M_1=\text{const},\ (t\geqslant 0),$$

分别蕴涵(2)的零解：

(i) 稳定； (ii) 渐近稳定； (iii) 一致稳定； (iv) 一致渐近稳定.

证明 作 Liapunov 泛函

$$V_1(t,x(\cdot))=\|x(t)\|+\int_0^t\int_t^{+\infty}\|C(u,s)\|\exp(-\int_t^u k(\tau)d\tau)du\|x(s)\|ds.$$

令 $V(t)=V_1(t,x(t;t_0,\varphi))$，$x(t;t_0,\varphi)$为(2)的解，则由(10)式，有 $D^+V(t)\leqslant m(t)\cdot V(t)$，从而

$$V(t)\leqslant V(t_0)\exp(\int_{t_0}^t m(s)ds),\ t\geqslant t_0. \tag{20}$$

(i) 若 $\int_{t_0}^t m(s)ds\leqslant M(t_0)$，由(20)，当 $t\geqslant t_0$ 时，

$$\|x(t)\|\leqslant V(t)\leqslant[1+\int_0^{t_0}\int_{t_0}^{+\infty}\|C(u,s)\|\exp(-\int_{t_0}^u k(\tau)d\tau)duds]\|\varphi\|e^{M(t_0)},$$

故(2)的零解稳定.

(ii) 当$\int_{t_0}^{+\infty}m(s)ds=-\infty$时，$\int_{t_0}^t m(s)ds$必有界，由(i)知，(2)的零解稳定. 又由(20)式

$$\|x(t)\|\leqslant V(t)\leqslant V(t_0)\exp(\int_{t_0}^t m(s)dx)\to 0,\ (t\to+\infty).$$

故(2)的零解渐近稳定.

(iii) 由(20)有

$$\|x(t)\|\leqslant V(t)\leqslant V(t_0)\exp(\int_{t_0}^t m(s)ds)\leqslant(1+M_1)e^M\|\varphi\|.$$

故 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon e^{-M}/[1+M_1]$，当 $\|\varphi\|<\delta$ 时，有 $\|x(t)\|<\varepsilon(t\geqslant t_0\geqslant 0)$，从而(2)的零解一致稳定.

(iv) 由$\int_{t_0}^t m(s)ds\to-\infty$(关于 t_0)，$\forall M_0>0$，$\exists T>0$，当 $t-t_0>T$ 时，$\int_{t_0}^t m(s)ds\leqslant -M_0$. 取 $t_0=0$，则当 $t>T$ 时，$\int_0^t m(s)ds\leqslant -M_0$，故$\int_0^t m(s)ds$有界. 从而$\int_{t_0}^t m(s)ds=\int_0^t m(s)ds-\int_0^{t_0}m(s)ds$一致有界. 根据(iii)知，(2)的零解一致稳定. 另外，取某一固定的 $\delta_0>0$，则当 $\|\varphi\|<\delta_0$ 时，$\forall\varepsilon>0$，取 $M_0>0$ 使得$(1+M_1)\delta_0e^{-M_0}<\varepsilon$. 对这个 M_0，由 $\int_{t_0}^t m(s)ds\to-\infty$ 知，$\exists T_1>0$，当 $t>t_0+T_1$ 时，$\int_{t_0}^t m(s)ds\leqslant -M_0$，从而

$$\|x(t)\|\leqslant V(t)\leqslant(1+M_1)\|\varphi\|e^{-M_0}<\varepsilon.$$

故(2)的零解一致渐近稳定.

特别，取 $m(t)=0$，得到

推论 1 对系统(2)，若存在 $k(t)\in C[T_0,R_+]$，使得

$$\mu(A(t))+\int_t^{+\infty}\|C(u,t)\|\exp(\int_t^u k(\tau)d\tau)du\leqslant 0,$$

则系统(2)的零解 Liapunov 稳定. 另外，若还有$\int_0^t\int_t^{+\infty}\|C(u,s)\|\cdot\exp(\int_t^u k(\tau)d\tau)duds$有界，

则系统(2)的零解 Liapunov 一致稳定.

推论 2 若积分方程

$$x(t)=-\mu(A(t))-\int_t^{+\infty}\|C(u,t)\|\exp(\int_t^u x(\tau)d\tau)du$$

有非负解 $x_0(t)\geqslant 0$,则系统(2)的零解 Liapunov 稳定.另外,若还有$\int_0^t\int_t^{+\infty}\|C(u,s)\|\exp(\int_t^u x_0(\tau)d\tau)duds$ 有界,则系统(2)的零解 Liapunov 一致稳定.

例 考虑 Volterra 系统

$$x'(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{1+t} & 0\\ 0 & \frac{1}{1+t}\end{bmatrix}x(t)+\int_0^t\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{(1+t)(1+s)}\\ e^{-(t+s)} & 0\end{bmatrix}x(s)ds+\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\end{bmatrix}. \quad (21)$$

在本例中,取 $\|x\|=(x^Tx)^{\frac{1}{2}}$,则有

$$\mu(A(t))=\lambda_{\max}(\frac{1}{2}[A^T(t)+A(t)])=\frac{1}{1+t},$$

$$\|C(t,s)\|=\lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}[C^T(t,s)\cdot C(t,s)]=\max\{\frac{1}{(1+t)(1+s)},e^{-(t+s)}\}=\frac{1}{(1+t)(1+s)},$$

取 $k(t)=\frac{1}{1+t}$,则

$$\begin{aligned}&\mu(A(t))+\int_t^{+\infty}\|C(u,t)\|\exp(-\int_t^u k(\tau)d\tau)du\\ &=\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1+t}\int_t^{+\infty}\frac{1}{1+u}\exp(\ln\frac{1+t}{1+u})du\\ &=\frac{1}{1+t}+\int_t^{+\infty}\frac{1}{(1+u)^2}du=\frac{2}{1+t}.\end{aligned}$$

又 $\|p(t)\|=1$,若取 $\beta(t)=\beta_0(1+t)^2+t(1+t)$,$\beta_0\geqslant a$,则

$$\begin{aligned}&\beta'(t)=m(t)\beta(t)+\|p(t)\|,\\ &\beta(t_0)=\beta_0(1+t_0)^2+t_0(1+t_0)\geqslant\beta_0(1+t_0)\geqslant a[1+\ln(1+t_0)]\\ &\quad=a(1+\int_0^{t_0}\int_{t_0}^{+\infty}\|C(u,s)\|\exp(-\int_{t_0}^u k(\tau)d\tau)duds],\ t\geqslant 0.\end{aligned}$$

根据定理 2 知,系统(21)关于$\{S_a,S_{\beta(t)},T(i)\}$实用一致稳定.

三 $V_2(t,x(\cdot))=[x^T(t)B(t)x(t)]^{\frac{1}{2}}+\int_0^t\Phi(t,s)\|x(s)\|ds$ 情形

设 $B(t)$ 为正定的矩阵函数,且

$$\|B(t)x\|\leqslant\widetilde{K}(t)[x^TB(t)x]^{\frac{1}{2}}, \quad (22)$$

$$\|x\|\leqslant\widetilde{k}(t)[x^TB(t)x]^{\frac{1}{2}}, \quad (23)$$

其中 $\widetilde{K}(t)\in C[R_+,R_+]$,$\widetilde{k}(t)\in C^1[R_+,R_+]$,$\widetilde{k}(t)>0$.

设 $\lambda_M(t)$ 为方程

$$\det\left(\frac{1}{2}[A^T(t)B(t)+B'(t)+B(t)A(t)]-\lambda B(t)\right)=0 \tag{24}$$

的最大特征根. 从而, 对$\forall\ x\in R^n$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}x^T[A^T(t)B(t)+B'(t)+B(t)A(t)]x\\
&=[B^{\frac{1}{2}}(t)x]^T\cdot\frac{1}{2}B^{-\frac{1}{2}}(t)[A^T(t)B(t)+B'(t)+B(t)A(t)]B^{-\frac{1}{2}}(t)\cdot[B^{\frac{1}{2}}(t)x]\\
&\leqslant\lambda_M(t)[B^{\frac{1}{2}}(t)x]^T[B^{\frac{1}{2}}(t)x]=\lambda_M(t)[x^TB(t)x].
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
&D^+_{(1)}V_2(t,x(\cdot))\\
&=\frac{1}{2}[x^T(t)B(t)x(t)]^{-\frac{1}{2}}\{[A(t)x(t)+\int_0^t C(t,s)x(s)ds+p(t)]^TB(t)x(t)\\
&\quad+x^T(t)B'(t)x(t)+x^T(t)B(t)[A(t)x(t)+\int_0^t C(t,s)x(s)ds+p(t)]\}\\
&\quad+\Phi(t,t)\,\|x(t)\|+\int_0^t(\partial\Phi(t,s)/\partial t)\,\|x(s)\|\,ds\\
&\leqslant[x^T(t)B(t)x(t)]^{-\frac{1}{2}}x^T(t)\,\frac{1}{2}[A^T(t)B(t)+B'(t)+B(t)A(t)]x(t)\\
&\quad+[x^T(t)B(t)x(t)]^{-\frac{1}{2}}\,\|B(t)x(t)\|\,[\int_0^t\|C(t,s)\|\,\|x(s)\|\,ds+\|p(t)\|]\\
&\quad+\Phi(t,t)\,\|x(t)\|+\int_0^t(\partial\Phi(t,s)/\partial t)\,\|x(s)\|\,ds\\
&\leqslant\lambda_M(t)[x^T(t)B(t)x(t)]^{\frac{1}{2}}+\Phi(t,t)\,\|x(t)\|\\
&\quad+\int_0^t[\widetilde{K}(t)\,\|C(t,s)\|+\partial\Phi(t,s)/\partial t]\,\|x(s)\|\,ds+\widetilde{K}(t)\,\|p(t)\|.
\end{aligned}$$

令 $\Phi(t,s)$满足

$$\begin{cases}\partial\Phi(t,s)/\partial t+\widetilde{K}(t)\,\|C(t,s)\|=k(t)\Phi(t,s),\\ \Phi(t,t)=\varphi_0(t),\end{cases} \tag{25}$$

其中 $k(t)$任意, $\varphi_0(t)$待定. 取 $\varphi_0(t)=\int_t^{+\infty}\widetilde{K}(u)\,\|C(u,t)\|\exp(-\int_t^u k(\tau)d\tau)du$,解方程(25),得

$$\Phi(t,s)=\int_t^{+\infty}\widetilde{K}(u)\,\|C(u,s)\|\exp(-\int_t^u k(\tau)d\tau)du. \tag{26}$$

由此, 得到 Liapunov 泛函为

$$\begin{aligned}
&V_2(t,x(\cdot))\\
&=[x^T(t)B(t)x(t)]^{\frac{1}{2}}+\int_0^t\int_t^{+\infty}\widetilde{K}(u)\,\|C(u,s)\|\exp(-\int_t^u k(\tau)d\tau)du\,\|x(s)\|\,ds,
\end{aligned} \tag{27}$$

而

$$\begin{aligned}
&D^+_{(1)}V_2(t,x(\cdot))\\
&\leqslant[\lambda_M(t)+\tilde{k}(t)\Phi(t,t)][x^T(t)B(t)x(t)]^{\frac{1}{2}}+k(t)\int_0^t\Phi(t,s)\,\|x(s)\|\,ds+\widetilde{K}(t)\,\|p(t)\|\\
&\leqslant\max\{\lambda_M(t)+\tilde{k}(t)\Phi(t,t),k(t)\}V_2(t),x(\cdot))+\widetilde{K}(t)\,\|p(t)\|.
\end{aligned} \tag{28}$$

类似于定理 1,可以得到

定理 5 对系统(1),若存在 $k(t)\in C[T_0,R]$,以及正定矩阵函数 $B(t)$,使得

(i) $m(t)\tilde{k}^{-1}(t)\beta(t)+\tilde{K}(t)\|p(t)\|\leqslant[\tilde{k}^{-1}(t)\beta(t)]'$, $t\in T_0$;

(ii) $[\lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}(B(t_0))+\int_0^{t_0}\Phi(t_0,s)ds]a\tilde{k}(t_0)\leqslant\beta(t_0)$,

其中 $m(t)=\max\{\lambda_M(t)+\tilde{k}(t)\Phi(t,t),k(t)\}$,$\tilde{K}(t)$,$\tilde{k}(t)$,$\lambda_M(t)$,$\Phi(t,s)$分别由(22),(23),(24),(26)给出,而 $\lambda_{\max}(B(t_0))$为 $B(t_0)$的最大特征值,则系统(1)关于$\{S_\alpha,S_{\beta(t)},T_0,t_0\}$实用稳定.

注 1 当 $C(t,s)=0$,即(1)成为线性常微分系统时,由(27),

$$V_2(t,x(\cdot))=[x^T(t)B(t)x(t)]^{\frac{1}{2}},\Phi(t,s)=0,$$

取 $k(t)=\lambda_M(t)$,则由定理 5,可导出线性常微分系统实用稳定性结论.

注 2 当取 $\|x\|=(x^Tx)^{\frac{1}{2}}$,$B(t)=I$ 时,

$$V_2(t,x(\cdot))=\|x(t)\|+\int_0^t\Phi(t,s)\|x(s)\|ds=V_1(t,x(\cdot)),$$

$$\lambda_M(t)=\lambda_{\max}(\frac{A^T(t)+A(t)}{2})=\mu(A(t)),\tilde{k}(t)=\tilde{K}(t)=1,$$

由定理 5 得到与定理 1 相同的结果.

注 3 若 $A(t)=A$ 稳定,从而存在正定阵 B,使得 $A^TB+BA=-I$. 则可取 $B(t)=B$,且 $\lambda_M(t)=-\frac{1}{2}\lambda_{\min}(B^{-1})$.

四 几个特例

本文构造的 V 泛函(或 Liapunov 泛函)具有相当的普遍性,以往许多 Liapunov 泛函都可看作是本文的特例. 现举例如下.

(a) 在(9)中取 $k(t)=0$,得到文[2]中的泛函:

$$V(t,x(\cdot))=\|x(t)\|+\int_0^t\int_t^{+\infty}\|C(u,s)\|du\|x(s)\|ds.$$

(b) 在(7)中取 $k(t)=-b$,得到文[3]中的泛函:

$$V(t,x(\cdot))=\|x(t)\|+\int_0^t[\varphi_0(s)e^{-b(t-s)}-\int_s^te^{-b(t-s)}\|C(u,s)\|du]\|x(s)\|ds.$$

(c) 在(27)中取 $k(t)=\frac{-a'(t)}{a(t)}(a(t)>0)$,得到文[3]中的泛函

$$V(t,x(\cdot))=[x^T(t)Bx(t)]^{\frac{1}{2}}+\tilde{K}\int_0^t\int_t^{+\infty}\frac{a(u)}{a(t)}\|C(u,s)\|du\|x(s)\|ds.$$

(d) 在(27)中取 $k(t)=0$,得到文[1]中的泛函:

$$V(t,x(\cdot))=[x^T(t)Bx(t)]^{\frac{1}{2}}+\tilde{K}\int_0^t\int_t^{+\infty}\|C(u,s)\|du\|x(s)\|ds.$$

(e) 在(27)中取 $k(t)=-\mu$,得到文[4]中的泛函:

$$V(t,x(\cdot))=[x^T(t)Bx(t)]^{\frac{1}{2}}+\tilde{K}\int_0^t\int_t^{+\infty}\|C(u,s)\|\exp[-\mu(t-\mu)]du\|x(s)\|ds.$$

参 考 文 献

[1] T. A. Burton, *Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations*, Academic Press, Inc. New York, 1985.

[2] T. A. Burton, Huang Quichang and W. E. Mahfoud, *Liapunov Functionals of Convolution Type*, J. Math. Anal. Appl., 106(1985), 249—272.

[3] T. A. Burton, *Construction of Liapunov functionals for Volterra equations*, J. Math. Anal. Appl., 85(1982), 90—105.

[4] 唐贤瑛、王联，非卷积型 Liapunov 泛函的构造，应用数学学报，13:4(1990), 506—508.

[5] 尤秉礼，常微分方程补充教程，高等教育出版社，1988, 41—43.

Construction and Application of V-Functionals for Linear Volterra Systems

Yang Shansong *Zhang Zongda*

(Math. Dept., Harbin Institute of Technology, Harbin, 150006)

Abstract

By means of resolving a linear partial differential equation, we construct a V-functional, and obtain some more general Liapunov functionals and V-functionals with changing signs. The practical stability and Liapunov's stability for linear Volterra systems, are also discussed.

Keywords linear Volterra system, V-functional, Liapunov's functional, practical stability, Liapunov's stability.