第16卷第2期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 2
1996年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1995

# 一类平面五次系统的极限环*

宋新宇 陈秀东
(信阳师范学院数学系，河南信阳 464000) (大连理工大学数学科学研究所，116024)

**摘 要** 研究了一类生化反应模型

$$\frac{dx}{dt}=(y^3+b)(\delta-xy),$$

$$\frac{dy}{dt}=y(bx+xy^3-ay^2),$$

得到了极限环不存在或存在唯一的如下条件：

1) 若 $P<0$，则系统(1)存在唯一稳定的极限环.

2) 若 $P\geqslant 0$，则系统(1)不存在极限环.

其中 $P=\frac{ab}{a-\delta}-(3\delta-2a)\sqrt[3]{\frac{b\delta}{a-\delta}}$.

**关键词** 极限环，平衡点，生物化学反应.

**分类号** AMS(1991) 34C05/CCL O175.12

## 1 引 言

关于酶促反应的非线性化学动力学模型的研究，其中对饱和反应模型的研究较多[1,2]，但对多重饱和态反应模型的研究很少见[3]，国外只见一些数值计算结果[4]，没有完整的理论分析. 我们考虑一类一级饱和反应系统，其中反应速度为三重饱和态，本文证明了这种系统当 $P<0$ 时是耗散结构，存在唯一稳定的极限环；当 $P\geqslant 0$ 时是一个全稳定系统，从而完整地对这一生化反应模型进行了系统分析.

本文研究的生化反应模型的反应机制[1]是：

$$[C_0]\xrightarrow{k_1}C_1,\ C_1+C_2\xrightarrow{k_2}2C_2,\ C_2\xrightarrow{v_m}Q(\text{产品}),$$

相应的数学模型为

$$\frac{d[C_1]}{dt}=k_1[C_0]-k_2[C_1][C_2],$$
$$\frac{d[C_2]}{dt}=k_2[C_1][C_2]-\frac{v_m[C_2]^3}{k_m+[C_2]^3}. \qquad \text{(S)}$$

无量纲化，作变换

$$x=[C_1],y=[C_2],dt=(\frac{k_m+y^3}{k_2})d\tau,$$

* 1993年10月22日收到. 河南省自然科学基金资助项目.

仍记 $d\tau$ 为 $dt$，其中 $k_m>0, x\geqslant 0, y\geqslant 0$，则系统(S)化为：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=(y^3+b)(\delta-xy),\\ \dfrac{dy}{dt}=y(bx+xy^3-ay^2),\end{cases}\tag{1}$$

其中 $b=k_m>0, a=\dfrac{v_m}{k_2}>0, \delta=\dfrac{k_1[C_0]}{k_2}>0.$

本文仅在 $G\overset{\text{def}}{=}\{(x,y)\mid x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$ 内对系统(1)进行系统分析.

## 2 奇点性态、中心焦点的判定

对于系统(1)，当 $a=\delta$ 时，全平面无有限远奇点；当 $a<\delta$ 时，在 $G$ 内无有限远奇点，因而这两种情况，区域 $G$ 内将无任何闭轨线.

当 $a>\delta$ 时，系统(1)在 $G$ 内有唯一有限远奇点 $M(C,D)$，其中

$$C=\sqrt[3]{\frac{\delta^2(a-\delta)}{b}}, D=\sqrt[3]{\frac{b\delta}{a-\delta}}.$$

奇点 $M(C,D)$ 处的一级近似方程的特征方程为

$$\lambda^2+PD\lambda+\frac{3ab^2\delta}{a-\delta}=0.$$

由此知，$M$ 为非鞍初等奇点，且：

当 $P<0$ 时，奇点 $M$ 是不稳定的；当 $P>0$ 时，奇点 $M$ 是稳定的. 其中

$$P=\frac{ab}{a-\delta}-(3\delta-2a)D.$$

下面讨论 $P=0$ 时，奇点 $M$ 的性态.

对系统(1)作变换

$$X=\sqrt{3bCD(b+D^3)}(x+y-C-D),\ Y=3bC(y-D),\ d\tau=\sqrt{3bCD(b+D^3)}dt,$$

仍以 $x,y,t$ 记 $X,Y,\tau$，则(1)化为

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+F_{02}y^2+F_{03}y^3,\\ \dot{y}=x+G_{11}xy+G_{02}y^2+G_{12}xy^2+G_{03}y^3+G_{04}y^4+G_{13}xy^3+G_{14}xy^4+G_{05}y^5,\end{cases}\tag{2}$$

其中

$$F_{02}=-\frac{3D(a-CD)}{(3bC)^2},\qquad F_{03}=-\frac{a-CD}{(3bC)^3},$$

$$G_{11}=\frac{b+4D^3}{3bCD(b+D^3)},\qquad G_{02}=\frac{6CD^2-3aD-b-4D^3}{3bC\sqrt{3bCD(b+D^3)}},$$

$$G_{12}=\frac{6D^2}{D(b+D^3)(3bC)^2},\qquad G_{03}=\frac{4CD-a-6D^2}{(3bC)^2\sqrt{3bCD(b+D^3)}},$$

$$G_{04}=\frac{C-4D}{(3bC)^3\sqrt{3bCD(b+D^3)}},\qquad G_{13}=\frac{4D}{(3bC)^3D(b+D^3)},$$

$$G_{14}=\frac{1}{(3bC)^4D(b+D^3)},\qquad G_{05}=-\frac{1}{(3bC)^4\sqrt{3bCD(b+D^3)}}.$$

对于系统(2)由文[5]的计算焦点量公式得到

$$P_4=\frac{1}{8}[3(F_{30}+G_{03})+F_{12}+G_{21}+F_{11}(F_{20}+F_{02})-G_{11}(G_{20}+G_{02})+2(F_{02}G_{02}-F_{20}G_{20})]$$

$$=\frac{\delta^2(2a-3\delta)+3\delta(\delta-a)D^2}{24Db(a-\delta)C^3(b+D^3)\sqrt{3bCD(b+D^3)}}<0\ (3\delta-2a>0;a-\delta>0).$$

所以当 $P=0$ 时，奇点 $M$ 为稳定的一阶细焦点.

## 3 极限环的存在唯一性

**定理1** 若 $a>\delta$，$P<0$，则系统(1)是耗散结构，存在唯一的稳定的极限环.

**证明** $P<0$，系统(1)在区域 $G$ 内的唯一奇点 $M(C,D)$ 是不稳定的非鞍初等奇点，围绕 $M$，构造一个班狄克生环域，外境界线为 $\overparen{AEBNHA}$ 使(1)的轨线与这个外境界线相交时，随着 $t$ 的增加，都从其外部穿入其内部，从而证明极限环的存在性.

记 $l_1=\{(x,y)\in G:\delta-xy=0\}$，$l_2=\{(x,y)\in G:bx+xy^3-ay^2=0\}$.

因为 $y=0$ 为直轨线，由解对初值的连续依赖性，存在 $A(0,y_A)$，$y_A>0$ 充分小，使过 $A$ 的轨线与 $l_2$ 相交，记交点为 $E(x_E,y_E)$，再作直线 $y=y_E$ 交 $l_1$ 于 $B(\frac{\delta}{y_E},y_E)$，过 $B$ 作直线 $x=\frac{\delta}{y_E}$，在它上取一点 $N(\frac{\delta}{y_E},y_N)$，$y_N$ 充分大，使 $b\delta+(\delta-a)y_N^3<0$. 过点 $N$ 作直线 $L:L(x,y)=x+y-(\frac{\delta}{y_E}+y_N)$，$L$ 交 $y$ 轴于 $H$，则在闭折线 $\Gamma^*=\overparen{AEBNHA}$ 上，与 $\Gamma^*$ 相交的所有轨线当 $t$ 增加时不跑出 $\Gamma^*$ 所围的区域(图1).

事实上，

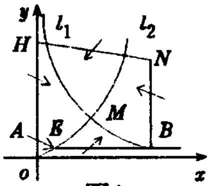

图1

在 $\overline{EB}$ 上：$\frac{dy}{dt}|_{EB}>0$，

在 $\overline{BN}$ 上：$\frac{dx}{dt}|_{BN}=(y^3+b)\delta(1-\frac{y}{y_E})<0$，

在 $\overline{NH}$ 上：$\frac{dL}{dt}|_{NH}=b\delta+(\delta-a)y^3<b\delta+(\delta-a)y_N^3<0$，

在 $\overline{HA}$ 上：$\frac{dx}{dt}|_{HA}=\delta(y^3+b)>0$.

又 $P<0$ 时，$M$ 是不稳定的非鞍奇点，因此(1)至少在 $G$ 内存在一个稳定极限环.

显然，由以上证明过程可知，系统(1)的一切正初值的正半轨线有界.

下面证明(1)的极限环的唯一性.

对系统(1)作时间变换 $dt=(y^3+t)^{-1}d\eta$，则(1)化为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{d\eta}=\delta-xy,\\ \dfrac{dy}{d\eta}=y(x-\dfrac{ay^2}{y^3+b}).\end{cases}\tag{3}$$

对(3)作平移变换 $x_1=x-C$，$y_1=y-D$，则(3)化为

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{d\eta}=\delta-(x_1+C)(y_1+D),\\ \dfrac{dy_1}{d\eta}=(y_1+D)(x_1+C-\dfrac{a(y_1+D)^2}{b+(y_1+D)^3}).\end{cases}\tag{4}$$

令 $w=x_1+y_1, u=y_1$，则(4)化为

$$\begin{cases}\dfrac{dw}{d\eta}=-Cu+(u+D)(C-\dfrac{a(u+D)^2}{b+(u+D)^3}),\\ \dfrac{du}{d\eta}=(u+D)[w-u+C-\dfrac{a(u+D)^2}{b+(u+D)^3}].\end{cases}\tag{5}$$

令 $X=u, Y=w, d\tau=(u+D)d\eta$，且仍以 $x, y, t$ 记 $X, Y, \tau$，则(5)化为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-F(x),\\ \dfrac{dy}{dt}=-g(x)\ (x>-D),\end{cases}\tag{6}$$

其中

$$F(x)=x-C+\frac{a(x+D)^2}{b+(x+D)^3},\quad g(x)=(a-\delta)\frac{(x+D)^3-D^3}{(x+D)(b+(x+D)^3)},$$

$$xg(x)=(a-\delta)\frac{x^2[x^2+3D(x+D)]}{(x+D)(b+(x+D)^3)}>0\ (x\neq 0),$$

$$G(x)=\int_0^x g(\xi)d\xi=(a-\delta)[\frac{b+D^3}{3b}\ln(b+(x+D)^3)-\frac{D^3}{b}\ln(x+D)$$
$$-\frac{b+D^3}{3b}\ln(b+D^3)+\frac{D^3}{b}\ln D]$$

当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-D+0$ 时，$G(x)\to+\infty$

$$f(x)=F'(x)=1-\frac{a(x+D)((x+D)^3-2b)}{(b+(x+D)^3)^2},\quad f(0)=1-\frac{aD(D^3-2b)}{(b+D^3)^2}=\frac{P}{b+D^3}<0,$$

$$(a-\delta)\frac{f(x)}{g(x)}=[(b+D^3)(x+D)-\frac{a(D^3-2b)}{b+D^3}(x+D)^2]\frac{1}{(x+D)^3-D^3}$$
$$+(\frac{a(D^3-2b)}{b+D^3}-a)\frac{(x+D)^2}{b+(x+D)^3}+x+D$$
$$=\frac{P(x+D)}{(x+D)^3-D^3}-(3\delta-2a)\frac{x(x+D)}{(x+D)^3-D^3}-3(a-\delta)-\frac{(x+D)^2}{b+(x+D)^3}+x+D,$$

$$(a-\delta)\frac{d}{dx}[\frac{f(x)}{g(x)}]=1+3(a-\delta)\frac{(x+D)[(x+D)^3-2b]}{(b+(x+D)^3)^2}$$
$$+\frac{(3\delta-2a)x^4-3PD(x+D)^2+x^2[2((3\delta-2a)D-P)x-3PD]}{((x+D)^3-D^3)^2}>0\ (x\neq 0),$$

由张芷芬的唯一性定理[6]知：系统(6)即系统(1)在 $P<0$ 条件下存在唯一的极限环，且它是稳定的.

## 4　极限环的不存在性

**引理 1**　设系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=P(x,y),\\ \dfrac{dy}{dt}=Q(x,y).\end{cases}\tag{7}$$

在平面区域 $\Omega$ 内存在闭轨线 $\Gamma$，其最小正周期为 $T$，又设 $P(x,y), Q(x,y), B(x,y)$ 和 $\dfrac{1}{B(x,y)}$ 在区域 $\Omega$ 内都是连续可微函数，则

$$\int_0^T \operatorname{div}(P,Q)dt = \int_0^T \frac{1}{B}\operatorname{div}(BP,BQ)dt. \tag{8}$$

**证明** $\int_0^T \frac{1}{B}\operatorname{div}(BP,BQ)dt = \int_0^T [\operatorname{div}(P,Q) + \frac{1}{B}\frac{dB}{dt}]dt = \int_0^T \operatorname{div}(P,Q)dt.$

**引理2** 设(1)有闭轨 $\Gamma$,其最小正周期为 $T$,则

1) $\int_0^T y(D^3 - y^3)dt = -\frac{1}{a-\delta}\iint\limits_{\mathrm{int}\Gamma} dxdy$;

2) $\int_0^T y(y-D)dt = \frac{1}{a-\delta}\iint\limits_{\mathrm{int}\Gamma}\frac{D^2-y^2}{(y^2+Dy+D^2)^2}dxdy$;

3) $\int_0^T xy^3dt = \delta\int_0^T y^2dt - \frac{1}{a}\iint\limits_{\mathrm{int}\Gamma} dxdy.$

**证明** 由系统(1)可得到 $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = b\delta - (a-\delta)y^3$,即

$$y(D^3-y^3) = \frac{y}{a-\delta}\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right).$$

所以 $\int_0^T y(D^3-y^3)dt = -\frac{1}{a-\delta}\iint\limits_{\mathrm{int}\Gamma} dxdy.$

又 $y(y-D) = -\frac{y}{(a-\delta)(y^2+Dy+D^2)}\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right)$. 所以

$$\int_0^T y(y-D)dt = \frac{1}{a-\delta}\iint\limits_{\mathrm{int}\Gamma}\frac{D^2-y^2}{(y^2+Dy+D^2)^2}dxdy.$$

再由系统(1)可知:

$$\frac{ay^2}{y^3+b}\frac{dx}{dt} + \frac{\delta}{y}\frac{dy}{dt} = b\delta x - (a-\delta)xy^3.$$

又 $x\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right) = b\delta x - (a-\delta)xy^3$. 所以 $\frac{y^2}{y^3+b}\frac{dx}{dt} = \frac{x}{a}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{a}\left(x - \frac{\delta}{y}\right)\frac{dy}{dt}.$

又 $\frac{y^2}{y^3+b}\frac{dx}{dt} = \delta y^2 - xy^3$,所以 $\delta y^2 - xy^3 = \frac{x}{a}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{a}\left(x-\frac{\delta}{y}\right)\frac{dy}{dt}$. 即

$$\int_0^T xy^3dt = \delta\int_0^T y^2dt - \frac{1}{a}\iint\limits_{\mathrm{int}\Gamma} dxdy.$$

**定理2** 若 $a > b, P \geqslant 0$,则系统(1)在 $G$ 内不存在极限环,此时奇点 $M$ 在 $G$ 上是全局渐近稳定的.

**证明** 设系统(1)在 $G$ 上有闭轨 $\Gamma$,最小正周期为 $T$,取 $B(x,y) = y^{-1}$,利用(8),(9),(10),(11)式得到

$$\Phi \overset{\mathrm{def}}{=} \int_0^T \operatorname{div}(P,Q)dt = \int_0^T y(-b - y^3 + 3xy^2 - 2ay)dt.$$

1° 当 $3\delta - 2a < 0$ 时

$$\Phi = -\int_0^T y(b+y^3)dt + (3\delta - 2a)\int_0^T y^2dt - \frac{3}{a}\iint\limits_{\mathrm{int}\Gamma} dxdy < 0;$$

2° 当 $3\delta - 2a \geqslant 0$ 时

$$\Phi = \int_0^T \operatorname{div}(P,Q)dt = \int_0^T y(-b - y^3 + 3xy^2 - 2ay)dt,$$

$$= -P\int_0^T ydt + \int_0^T y(D^3-y^3)dt + (3\delta - 2a)\int_0^T y(y-D)dt - \frac{3}{a}\iint\limits_{\mathrm{int}\Gamma} dxdy$$

$$= -P\int_0^T y\,dt - \frac{1}{a-\delta}\iint_{\mathrm{int}\,\Gamma}\frac{R(y)}{(y^2+Dy+D^2)^2}dx\,dy,$$

$$R(y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (y^2+Dy+D^2)^2\left[1+\frac{3(a-\delta)}{a}\right]-(3\delta-2a)(D^2-y^2),$$

$$R'(y) = 2(2y+D)(y^2+Dy+D^2)\left[1+\frac{3(a-\delta)}{a}\right]+2y(3\delta-2a)>0\ (y>0),$$

$$R(0) = D^4+\frac{3(a-\delta)}{a}D^4-(3\delta-2a)D^2>PD\geqslant 0,\ (\text{因为 } 3\delta>a).$$

于是 $\forall y>0, R(y)>0$. 所以在 $P\geqslant 0$ 条件下 $\Phi<0$.

因此，沿着(1)的任一条闭轨线，其发散量积分都为负数，也就是说围绕 $M$ 只存在稳定的极限环，这与 $M$ 是稳定的非鞍奇点矛盾.

(1) 在 $G$ 上的轨线是有界的，并且不存在闭轨，因此 $M$ 是全局渐近稳定的.

综上所述，系统(1)当唯一正平衡点是不稳定奇点时，存在唯一的围绕此奇点的稳定极限环. 当此平衡点是稳定奇点时，它是全局渐近稳定的.

## 参 考 文 献


[1] 陈兰荪、陈键，非线性生物动力系统，科学出版社，1993.

[2] 程中瑗等，一类生化反应模型的系统分析，应用数学学报，15:3(1992)，389—396.

[3] 宋新宇、陈秀东，一类生化反应数学模型的分析，生物数学学报，7:3(1992)，59—65.

[4] V. Fairen and M. G. Velarde, J. Math., Biology, 8(1979), 147—157.

[5] F. Gobben, K. D. Willamowski, J. of Math. Anal. and Appl., 71(1979), 333—350.

[6] 张芷芬等，微分方程定性理论，科学出版社，1985.


# The Limit Cycle of a 5-th Order System on the Plane


*Song Xinyu*

(Xinyang Teachers College, Henan 464000)

*Chen Xiudong*

(Dalian University of Technology, 116024)



**Abstract**

In this paper, we consider a model in biochemical reaction

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=(y^3+b)(\delta-xy)\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=y(bx+xy^3+ay^2)\end{cases}\tag{1}$$

and obtain the following result: in the first quadrant the unique positive equibrium is globally asymptotically stable when it is stable; and if it is unstable, then (1) has a unique stable limit cycle.



**Keywords** llimit cycle, equilibrium point, biochemical raction.