第16卷第2期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 2
1996年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1996

G-可迁空间与分次本原环*

郭广泉
（滁州师范专科学校数学系，滁州239012）

摘　要　本文给出分次环同构于G-可迁空间上分次线性变换完全环的充要条件并且讨论了分次一致本原环的结构.

关键词　gr-一致本原环，G-可迁空间，广义smash积.

分类号　AMS(1991) 16A03, 16A21/CCL O153.3

本文中，G表示群，A表示有单位元的G-分次环.

一　关于分次线性变换环

设T是A的齐次元素集$h(A)$的非空子集，$\mathrm{Ann}_A^r(T)=\{a\in A\mid Ta=0\}$，$\mathrm{Ann}_A^l(T)=\{a\in A\mid aT=0\}$，则$\mathrm{Ann}_A^r(T)$，$\mathrm{Ann}_A^l(T)$分别是$A$的分次右、左理想.

定义1.1　设R，L分别是A的分次右、左理想.如果存在$h(A)$的非空子集T，S使得$R=\mathrm{Ann}_A^r(T)$，$L=\mathrm{Ann}_A^l(S)$，那么称R，L分别为A的右、左Annulet.

A的所有极小分次左理想的和称为A的分次基座，记为$\mathrm{Soc}^{gr}(A)$.如果A是分次本原环，则$\mathrm{Soc}^{gr}(A)$为A的最小分次理想且等于A的所有极小分次右理想之和.

定义1.2　D是G-分次除环，M是分次左D-空间.如果$M_g\neq 0$则$M=DM_g$，那么称M为D-迁移空间.如果对任意$g\in G$，有$M=DM_g$，那么称M为G-可迁的.

命题1.3　M是分次D-空间且$M_e\neq 0$. M是D-迁移空间$\Leftrightarrow$对任意$g\in G$，如果$M_g\neq 0$，则$D_g\neq 0$.

证明　“$\Rightarrow$”　如果$M_g\neq 0$，则$M=DM_g$.因为$0\neq M_e=D_{g^{-1}}M_g$，所以$D_{g^{-1}}\neq 0$，从而$D_g\neq 0$.

“$\Leftarrow$”　设$M_g\neq 0$.对任意$h\in G$，如果$M_h=0$，则$M_h\subseteq DM_g$.如果$M_h\neq 0$，那么$D_{h^{-1}}\neq 0$.由$D_gD_{h^{-1}}M_h\subseteq M_g$得$M_h\subseteq D_hD_{g^{-1}}M_g\subseteq D_{hg^{-1}}M_g\subseteq(DM_g)_h$.因此，$M=DM_g$.

引理1.4　M是G-分次D-空间，M是D-迁移的且$M_e\neq 0$.则对任意$M_g\neq 0$，有环同构$(\mathrm{END}_DM)_e\cong\mathrm{End}_{D_e}M_g$.

证明　由于M是D-迁移的且$M_g\neq 0$，则可设$\{m_\alpha\}\subseteq M_g$为$M$的齐次元素基.由[4]，$\{m_\alpha\}$是$M_g$的$D_e$-基.对任意$\varphi\in\mathrm{END}_{D_e}M_g$，定义：

* 1992年8月29日收到. 94年11月24日收到修改稿.

$$\Psi : M \to M,\ \sum_{i=1}^{n} d_{k_i} m_i \to \sum_{i=1}^{n} d_{k_i} \varphi(m_i),$$

$d_{k_i} \in D_{k_i}, i = 1,2,\cdots,n$. 易见 $\Psi \in (\mathrm{END}_D M)_e$. 定义

$$\dot{\Phi} : \mathrm{END}_{D_e} M_g \to (\mathrm{End}_D M)_e,\ \varphi \to \Psi,$$

容易验证 Φ 是环同构.

为方便起见,记 $\Gamma = \{g \in G \mid \forall\ 0 \neq a_e \in A_e, a_e A_g a_e \neq 0\}$,并将下列三个条件称为分次 Wolfson 条件:

(a) A 的分次基座不是零环且是 A 的最小分次理想;

(b) I 是 A 的分次左理想. 如果 $\mathrm{Ann}_A^r(I) = 0$,则 $I \geqslant \mathrm{Soc}^{gr}(A)$.

(c) 两个分次右 Annulet 的和仍是分次右 Annulet.

定理 1.5 A 是某 G- 可迁空间 M 上的分次线性变换完全环的充要条件是:

(1) A 满足分次 Wolfson 条件;

(2) $\Gamma = G$;

(3) A 是强分次环.

证明 "⇒" 如果 $A = \mathrm{END}_D M$,M 是 G- 可迁空间. 同[1]中定理 6.1 可证 A 满足分次 Wolfson 条件. 设 $0 \neq a_e \in A_e$,由 M 的 G- 可迁性知,存在 $0 \neq m_e \in M_e$ 使得 $m_e a_e \neq 0$ 且对任意 $g \in G$,存在 $0 \neq d_g \in D_g$ 使得 $d_g m_e \neq 0$. 由 A 的 gr- 稠密性有 $a_g \in A_g$ 使 $m_e a_e a_g = d_g m_e$. 因此,$m_e a_e a_g a_e = d_g m_e a_e \neq 0$. 所以 $a_e A_g a_e \neq 0$,即证得(2). 由(2)立即可得 $A = \mathrm{END}_D M$ 是强分次环.

"⇐" 取 A 的极小分次右理想 M,同[1]中定理 7.5 可证明 $A_e = (\mathrm{END}_D M)_e$,再由条件(3)可得对任意 $g \in G$,$A_g = (\mathrm{END}_D M)_g$,其中 $D = a_e A a_e$ 是分次除环,$M = a_e A$ 是 A 的极小分次右理想,a_e 是非零幂等元. 根据条件(2),对任意 $g \in G$,$a_e A_g = M_g \neq 0$,且 $a_e A_g a_e = D_g \neq 0$. 因此,由命题 1.3,M 是 G- 可迁空间.

二 关于gr- 一致本原环

如果 A 有忠实 G- 不变 gr- 单左模,则称 A 是 gr- 一致本原环[5].

命题 2.1 A 是 gr- 一致本原环 ⇔ A 是 G- 可迁空间 M 上的分次线性变换环的稠密子环.

证明 "⇒" 设 A 是 gr- 一致本原环,M 是忠实 G- 不变 gr- 单左模. 根据[6]定理 I.5.1 及[2],$D = \mathrm{END}_A M$ 是强分次环且是分次除环. 因此,对于任意 $g \in G$,$D_g \neq 0$ 且 M 自然地成为右 D- 空间. 又因为 $M \neq 0$,所以存在 $h \in G$ 使 $M_h \neq 0$. 因此,$0 \neq M_h D_{h^{-1}} \subseteq M_e$,从而对任意 $g \in G$,$M_g \neq 0$. 根据命题 1.3,M 做为右 D- 空间是 G- 可迁的. A 的分次稠密性由[2]可得.

"⇐" A 是 G- 可迁空间 M 上的分次线性变换环的 gr- 稠密子环,则 M 是分次单左模,且对任意 $g \in G$,$M_g \neq 0$. 由命题 1.3,对任意 $g \in G$,$D_g \neq 0$. 取 $0 \neq m_e \in M_e$,$0 \neq d_g \in D_g$,有 $\mathrm{Ann}_A^l(m_e) = \mathrm{Ann}_A^l(m_e d_g)$. 因为 M 是分次单的,所以有分次左 A- 模同构

$$M(e) \cong A/\mathrm{Ann}_A^l(m_e) = A/\mathrm{Ann}_A^l(m_e d_g) \cong M(g).$$

由 g 的任意性,M 是 G- 不变的. M 的忠实性是显然的. 因此,A 是 gr- 一致本原环.

由定理 1.5 及命题 2.1 立即可得：

推论 2.2 A 是有极小分次单侧理想的本原环且 $\Gamma = G$，则 A 是 gr- 一致本原环.

推论 2.3 A 是 gr- 一致本原环，则 $\Gamma = G$.

证明 设 M 是 G- 不变忠实分次 A- 模，由命题 2.1，A 是分次除环 D 上的 G- 可迁空间 M 的分次线性变换环的 gr- 稠密子环. 所以，$M = M_g D$，$\forall g \in G$. 对 $\forall\ 0 \neq a_e \in A_e$，$A_{a_e} \neq 0$. 因此，存在 $h \in G$ 使 $M = Aa_eM_h$，从而 $M_{gh} = A_g a_e M_h \neq 0$. 又由于 $0 \neq a_e M = a_e(M_{gh}D) = a_e[(A_g a_e M_h)D] = (a_e A_g a_e)(M_h D) = (a_e A_g a_e)M$，所以对任意 $g \in G$，$a_e A_g a_e \neq 0$.

$A\#G$ 是 A 与群 G 的广义 smash 积. 由[7]，A 是左 A_e- 右 $A\#G$- 双模，也是右 $A\#G$- 左 A_e- 双模. 定义映射

$$[\ ,\ ]: A \underset{A_e}{\otimes} A \to A\#G, [a,b] = \sum ab_{g^{-1}} p_g,$$

$$(\ ,\ ): A \underset{A\#G}{\otimes} A \to A_e, (a,b) = (ab)_e.$$

[7] 中证明了：$\mu = \{A_e, {}_{A_e}A_{A\#G}, {}_{A\#G}A_{A_e}, A\#G, [,], (,)\}$ 是 Morita context.

定义 2.4 Morita context μ 称为 $A\#G$- 忠实的，如果对任意 $x \in A\#G$，$(A, xA) = 0$ 则 $x = 0$.

引理 2.5 A 是 G- 分次环且分次非奇异，A_e 为素环. 如果对任意 $g \in G$，$A_g \neq 0$，那么 μ 是 $A\#G$- 忠实的.

证明 设 $x = \sum_{i=1}^{n} a_i p_{g_i} \in A\#G$，$xA_{g_j} = (\sum_{i=1}^{n} a_i p_{g_i})A_{g_j} = a_j A_{g_j}$，$j = 1,2,\cdots,n$. 所以，由 $(A, xA) = 0$ 得：对任意 $g \in G$，

$$0 = (A_g, (\sum_{i=1}^{n} a_i p_{g_i})A_{g_i}) = (A_g, a_j A_{g_j}) = (A_g a_j A_{g_j})_e = A_g(a_j)_{g^{-1}g_j^{-1}} A_{g_j},\ j = 1,2,\cdots,n.$$

由 $A_{g_j} \neq 0$ 及分次非奇异性有：$A_g(a_j)_{g^{-1}g_j^{-1}} = 0$，$\forall g \in G$，$j = 1,2,\cdots,n$. 因此，

$$A_{g^{-1}}[A_g(a_j)_{g^{-1}g_j^{-1}}]A_{g_j g} = (A_{g^{-1}}A_g)[(a_j)_{g^{-1}g_j^{-1}}A_{g_j g}] = 0,\ \forall g \in G, j = 1,2,\cdots,n.$$

因为 $A_{g^{-1}}A_g \neq 0$，所以由 A_e 的素性有 $(a_j)_{g^{-1}g_j^{-1}}A_{g_j g} = 0$，$\forall g \in G$，$j = 1,2,\cdots,n$. 再由分次的非奇异性有 $(a_j)_{g^{-1}g_j^{-1}} = 0$，$\forall g \in G$，$j = 1,2,\cdots,n$. 故有 $a_j = 0$，$j = 1,2,\cdots,n$. 因此 $x = 0$.

由[8]定理 2.7 得

引理 2.6 Morita context μ 是 $A\#G$- 忠实的. A_e 是本原环，则 $A\#G$ 是本原环.

命题 2.7 A_e 是本原环，$\Gamma = G$ 且 A 分次非奇异 $\Leftrightarrow A$ 是 gr- 一致本原环.

证明 "$\Rightarrow$" 由引理 2.5，Morita context μ 是 $A\#G$- 忠实的. 根据引理 2.6，$A\#G$ 是本原环. 再由[5]定理 4.6，A 是 gr- 一致本原环.

"$\Leftarrow$" 由推论 2.3，$\Gamma = G$. 设 M 是忠实 G- 不变分次单 A- 模. 由命题 2.1 的证明知：对任意 $g \in G$，$M_g \neq 0$ 且如果 $a_e \in A_e$，$a_e M_e = 0$ 则 $a_e M = 0$. 因此，如果 M 是忠实的则 M_e 是忠实 A_e- 模. 显然 M_e 是单 A_e- 模. 因此，A_e 是本原环. 最后，$a_g \neq 0$，则 $Aa_g \neq 0$，$Aa_g M_h = M$，$M_h = A_{g^{-1}}a_g M_h \neq 0$. 故 $A_{g^{-1}}a_g \neq 0$. 再由 A_e 的本原性得 $a_g A_{g^{-1}} \neq 0$.

至此，我们可得如下

推论 2.8 A 是 G- 分次环. 下列条件等价.

(1) A_e 是本原环，$\Gamma = G$ 且 A 分次非奇异.

(2) A 是 gr- 一致本原环.

(3) A 是 G- 可迁空间上分次线性变换 gr- 稠密环.

(4) $A\#G$ 是本原环.

作者衷心感谢刘绍学教授的精心指导.

参 考 文 献

[1] Kenneth, G. Wolfson, *An ideal-theoretic characterization of the rings of all linear transformations*, Amer. J. Math., 75(1953), 358—386.

[2] 刘绍学，分次本原环的结构，科学通报，1990，35(22):1696.

[3] 刘绍学，环与代数，科学出版社，1983.

[4] Margaret Beattie, Fang Hongjin and Liu Shaoxue, *Graded division rings and Jacobson density theorem*，北京师范大学学报(自)，1991, No. 2, 129—134.

[5] Liu Shaoxue, F. V. Oystaeyen, *Group graded rings Smash products and additive categories*, Perpectives in Ring Theory, Kluwer Academic Publisbers, 1988, 299—310.

[6] C. Nastasescu, F. V. Oystaeyen, *Graded Ring Theory*, Nor-Holand Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxfor, 1982.

[7] Margaret Beattie, *Duality theorem for rings with actions or coactions*, J. Algebra., 115(1988), 303—312.

[8] S. A. Amitsur, *Rings of quotients and morita context*, J. Algebra., 17(1971), 273—298.

G- Transitive Space and Graded Primitive Rings

Guo Guangquan

(Dept. of Math., Chuzhou Teachers' College, Anhui 239012

Abstract

We determine necessary and sufficient condition for a G- graded ring A to be isomorphic to G- graded linear transformations fully ring over G- transitive space. We also study structures of gr-uniformly primitive rings.

Keywords gr-primitive ring, G- transitive space, generalized smash product.