第16卷第2期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 2
1996年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1996

有幺单Γ-环类所确定的上根*

陈维新 张寿传
(浙江大学数学系，杭州310027) (复旦大学数学系，上海200433)

摘 要 结合环根论中由具有单位元的单环类所确定的上根就是Brown-McCoy根.本文指出在Γ-环中,鉴于Γ-环单位元的复杂性质使得有幺单Γ-环类确定的上根演变成8个,进而研究了这些根之间及这些根与Γ-环其它根之间的大小关系.

关键词 Γ-环,单位元,特殊类,上根.
分类号 AMS(1991) 16N99/CCL O153.3

在结合环根论中已阐明([1],§7.5):

具有单位元的单环类是特殊类,其上根即为Brown-McCoy根.一个单环类若是特殊类,则类中每个单环必具有单位元,从而其上根也就是Brown-McCoy根.

在Γ-环根论中情况复杂很多,本文将致力于此.首先根据Γ-环单位元强弱,左右的区分可构造出8个不同的有幺单Γ-环类,它们都是特殊类,从而得出对应的8个上根,进而阐明这8个上根确是互异的,并比较了它们之间大小.最后导出了这些根和Γ-环其它根之间的大小关系.

本文记号术语沿用[2].

下面列出Γ-环中有关单位元的定义:

定义1 若Γ-环M的右算子环R中存在元素$\sum_{i=1}^{k}[\alpha_i,e_i]$使得对$M$中任意元素$x$,均有$\sum_{i=1}^{k}x\alpha_ie_i=x$.则称$M$具有右单位元$\sum_{i=1}^{k}[\alpha_i,e_i]$.特别地当$k=1$时,则称$M$具有强右单位元$[\alpha_1,e_1]$.

同样可定义M的左单位元和强左单位元.

定义2 若$\sum_{i=1}^{k}[\alpha_i,e_i]$是$\Gamma$-环$M$的右单位元,$\sum_{i=1}^{k}[e_i,\alpha_i]$是$M$的左单位元,则称$M$具有单位元.特别地当$k=1$时,称$M$具有强单位元.

在[2]中已导入Γ-环的特殊类及特殊根.

定义3 设$\mathbf{M}$是Γ-环类,满足下列条件:

(S1) 对任意的$M\in\mathbf{M}$,有M是素Γ-环.

(S2) 对任意的$M\in\mathbf{M}$任取$0\neq I\lhd M$,有$I\in\mathbf{M}$.

---

* 1993年7月19日收到.浙江省自然科学基金资助项目.

(S3)　若 $A \in \mathbf{M}, A \lhd M$，则 $M/A^* \in \mathbf{M}$，此处

$$A^* = \{x \in M \mid x\Gamma A = 0 = A\Gamma x\},$$

则称 $\mathbf{M}$ 是特殊类.

若 $\mathbf{M}$ 是特殊类，据[2]定理 1.9 知其上根 $r^{\mathbf{M}}$ 存在，称为特殊根.

定理 1　设 $\mathbf{M}$ 是由某些具有单侧单位元的单 Γ- 环组成的类，则 $\mathbf{M}$ 是特殊类.

证明　$\mathbf{M}$ 适合(S1)，(S2)是显见的，下证适合(S3)：对任意的 $A \in \mathbf{M}$ 且 $A \lhd M$ 知 A 是素 Γ- 环，由[2]的引理 2.2 知

$$A^* = (A)_r = (A)_l, A^* \cap A = \{0\},$$

其中 $(A)_r = \{x \in M \mid A\Gamma x = 0\}, (A)_l = \{x \in M \mid x\Gamma A = 0\}$. 现若 A 有右单位元 $\sum\limits_{i=1}^{k}[a_i, e_i]$，则对任意的 $x \in M$ 有

$$x = x\sum_{i=1}^{k}[a_i, e_i] + (x - x\sum_{i=1}^{k}[a_i, e_i]).$$

而 $(x - x\sum\limits_{i=1}^{k}[a_i, e_i]) \in (A)_r = A^*$，从而 $M = A + A^*$. 现 $A \cap A^* = \{0\}$，故 $M = A \oplus A^*$. 于是 $M/A^* \cong A \in \mathbf{M}$. 在 A 有左单位元的条件下类似可证得 $M/A^* \in \mathbf{M}$. □

下记：

$\mathbf{M}_{br} = \{M \mid M$ 是具有右单位元的单 Γ- 环$\}$；

$\mathbf{M}_{bl} = \{M \mid M$ 是具有左单位元的单 Γ- 环$\}$；

$\mathbf{M}_{brl} = \{M \mid M$ 是具有左、右单位元的单 Γ- 环$\}$

$\mathbf{M}_{brs} = \{M \mid M$ 是具有强右单位元的单 Γ- 环$\}$；

$\mathbf{M}_{bls} = \{M \mid M$ 是具有强左单位元的单 Γ- 环$\}$；

$\mathbf{M}_{brls} = \{M \mid M$ 是具有强左、强右单位元的单 Γ- 环$\}$；

$\mathbf{M}_{bi} = \{M \mid M$ 是具有单位元的单 Γ- 环$\}$；

$\mathbf{M}_{bis} = \{M \mid M$ 是具有强单位元的单 Γ- 环$\}$.

据定理 1 可得

定理 2　$\mathbf{M}_{br}, \mathbf{M}_{bl}, \mathbf{M}_{brl}, \mathbf{M}_{brs}, \mathbf{M}_{bls}, \mathbf{M}_{brls}, \mathbf{M}_{bi}, \mathbf{M}_{bis}$ 均是特殊类，统称为有幺单 Γ- 环特殊类. 它们所确定的上根分别记为：$r_{br}, r_{bl}, r_{brl}, r_{brs}, r_{bls}, r_{brls}, r_{bi}, r_{bis}$，统称为幺单根.

下面将阐明幺单根确是互异的根. 首先利用对应特殊类的包含关系及[2]的定理 1.11 可得：

命题 1　$r_{br} \subseteq r_{brs} \subseteq r_{brls} \subseteq r_{bis}$，$r_{bl} \subseteq r_{bls} \subseteq r_{brls}$，$r_{br} \subseteq r_{brl} \subseteq r_{brls}$，$r_{bl} \subseteq r_{brl} \subseteq r_{bi} \subseteq r_{bis}$.

设 F 是域，按习惯把可数集的势记为 $\aleph_0$，作：$F_{n\times\aleph_0} = \{x \mid x = (a_{ij}), a_{ij} \in F, i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots$ 且仅有有限个 $a_{ij} \neq 0\}$. 同样可作 $F_{\aleph_0\times n}$. 现取 $M_1 = F_{n\times\aleph_0}, \Gamma = F_{\aleph_0\times n}$，则 M_1 对矩阵的加法和乘法构成 Γ- 环. 同样可取 $M_2 = F_{\aleph_0\times n}, \Gamma = F_{n\times\aleph_0}$，则 M_2 也构成 Γ- 环，可以证得：

命题 2　$M_1(M_2)$ 是具有强左(右)单位元，不具有右(左)单位元的单 Γ- 环.

证明　记 $e(i, j)$ 为第 i 行第 j 列上元素为 1 其余元素为 0 的矩阵，记 E_n 为 n 阶单位矩阵. 任取 $0 \neq I \lhd M_1$，则 I 中有非零矩阵 x. 设 x 的 i_0 行 j_0 列元素 $a_{i_0, j_0} \neq 0 (i_0 \leqslant n)$，对任意的

$1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j$ 有

$$e(i,j_0)a_{i_0,j_0}^{-1}e(j_0,i_0)xe(j_0,i_0)e(i_0,j) = e(i,j) \in I.$$

从而 $I = M_1$，而 $M_1 \Gamma M_1 \neq 0$ 是显见的，故 M_1 是单 Γ- 环.

取 $u = (E_n\ 0) \in M_1, \alpha = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$，则对任意的 $x \in M_1$ 有 $[u,\alpha]x = u\alpha x = x$，故 M_1 有强左单位元 $[u,\alpha]$. 但 M_1 无右单位元. 若不然 M_1 有右单位元 $\sum_{i=1}^{k}[\alpha_i,u_i]$. 注意到 $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i u_i = (a_{ij})$ 是一个仅有有限个元素不为 0 的可数行可数列矩阵，故存在正整数 t，当 $i \geqslant t$ 或 $j \geqslant t$ 时，有 $a_{ij} = 0$. 取 $0 \neq e(1,t)$，则 $e(1,t)\sum_{i=1}^{k}[\alpha_i,u_i] = 0 \neq e(1,t)$，此为矛盾.

对 M_2 的结论类似可证得. □

因单环对任何根性质，或是根环，或是半单的. 从而可得：

推论 1 $r_{bls}(M_1) = r_{bl}(M_1) = 0, r_{brl}(M_1) = r_{brls}(M_1) = r_{brs}(M_1) = r_{br}(M_1) = M_1$.

推论 2 $r_{brs}(M_2) = r_{br}(M_2) = 0, r_{bl}(M_2) = r_{bls}(M_2) = r_{brl}(M_2) = r_{brls}(M_2) = M_2$.

综合上述命题及推论可得：

命题 3 $r_{brs} < r_{brls}$，$r_{bls} < r_{brls}$，$r_{bl} < r_{brl}$，$r_{br} < r_{brl}$. $r_{brs} \nleqq r_{bls}$，$r_{bls} \nleqq r_{brs}$. $r_{bl} \nleqq r_{br}$，$r_{br} \nleqq r_{bl}$ 及 $r_{brl} \nleqq r_{brs}$，$r_{brl} \nleqq r_{bls}$.

取 $M_3 = F_{m\times n}, \Gamma = F_{n\times m} (n > m)$ 则 M_3 按通常运算构成 Γ- 环. 同样取 $M_4 = F_{n\times m}, \Gamma = F_{m\times n} (n > m)$，则 M_4 也构成 Γ- 环. 可以证得：

命题 4 $M_3(M_4)$ 是单 Γ- 环，且具有强左(右)单位元，有右(左)单位元，但无强右(左)单位元.

证明 类似命题 2 可证得 M_3 是单 Γ- 环.

取 $e = (E_n\ 0) \in M_3, \alpha = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$，则易知 $[e,\alpha]$ 为 M_3 的强左单位元.

设 $n = lm + s (0 \leqslant s < m)$，若 $s = 0$，则取 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} E_m \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times m}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0_m \\ E_m \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times m}, \cdots, \alpha_l = \begin{pmatrix} 0_{(l-1)m\times m} \\ E_m \end{pmatrix}_{n\times m}, e_1 = (E_m\ 0)_{m\times n}, e_2 = (0_m\ E_m\ 0)_{m\times n}, \cdots, e_l = (0_{m\times(l-1)m}\ E_m)_{m\times n}$. 可直接验证 $\sum_{i=1}^{l}[\alpha_i,e_i]$ 为 M_3 的右单位元. 若 $s \neq 0$，此时上述

$$\alpha_l = \begin{bmatrix} 0_{(l-1)m\times m} \\ E_m \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times m}, e_l = (0_{m\times(l-1)m}\ E_m\ 0)_{m\times n}.$$

再记 $\alpha_{l+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix}_{n\times m}, e_{l+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix}_{m\times n}$.

同样可验证 $\sum_{i=1}^{l+1}[\alpha_i,e_i]$ 为 M_3 的右单位元.

下证 M_3 不可能有强右单位元. 若不然有 $\alpha' \in \Gamma e' \in M$，使 $[\alpha',e']$ 为 M_3 的强右单位元，则

$\alpha e'$ 为退化的 $n \times n$ 阶矩阵，故存在非零矩阵 x，使 $x\alpha e' = 0 \neq x$. 此为矛盾.

对 M_4 的结论类似可证得. 证毕.

推论 3 $r_{br}(M_3) = r_{bl}(M_3) = r_{brl}(M_3) = 0$, $r_{brs}(M_3) = r_{brls}(M_3) = r_{bi}(M_3) = M_3$.

推论 4 $r_{br}(M_4) = r_{bl}(M_4) = r_{brl}(M_4) = 0$, $r_{bls}(M_4) = r_{brls}(M_4) = r_{bi}(M_4) = M_4$.

综合推论 3，推论 4 及命题 1 可得：

命题 5 $r_{br} < r_{brs}$, $r_{bl} < r_{bls}$, $r_{brl} < r_{brls}$, $r_{brl} < r_{bi}$, $r_{brs} \nleq r_{brl}$, $r_{bls} \nleq r_{brl}$.

约定：设 r_1, r_2, r_3, r_4 为 Γ- 环的根，以记号 $r_1 - r_2$ 表示 $r_1 < r_2$；以处在同一竖直位置又无直线相连的：$\begin{matrix} r_3 \\ r_4 \end{matrix}$ 表示 r_3 与 r_4 互不包含，我们可有：

定理 3 在 Γ- 环中下图成立：

$$\begin{array}{ccccc} r_{br} & \text{——} & r_{brs} & & \\ & & r_{brl} & \text{——} & r_{brls}; \\ r_{bl} & \text{——} & r_{bls} & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} r_{br} & & \\ r_{brl} & \text{——} & r_{bi}. \\ r_{bl} & & \end{array}$$

证明 综合命题 3，命题 5 即得.

至此确已构造出互不相同的幺单根.

Γ- 环是结合环的拓广，故下述问题就颇有兴趣：当一个结合环 R 解释为 Γ- 环 M 后，R 的 Brown-McCoy 根（下简记为 r_{bm}- 根）与 M 的上述诸多幺单根关系如何？为此先引结合环论中一个常用的结果：

引理 1 R 是结合环，若 R 是具有单侧单位元 e 的单环，则 e 就是 R 的单位元，从而 R 是具有单位元的单环.

结合环 R 解释为 Γ- 环 M 通常有二种途径：第一是取 $M = R$, $\Gamma = R$，定义 $M \times \Gamma \times M \to M$ 的合成为 R 中乘法，此时可有

定理 4 在结合环 R 按第一种途径解释为 Γ- 环 M 所成的 Γ- 环类中有：

$$r_{br} = r_{bl} = r_{brl} = r_{brs} = r_{bls} = r_{brls} = r_{bi} = r_{bis}, \tag{1}$$

且(1)中根即为 R 作为结合环的 Brown-McCoy 根.

证明 为证(1)，只要证明此时有幺单 Γ- 环特殊类均相等即可. $\forall\, M \in \mathbf{M}_{br}$，则 M 是单 Γ- 环，此时 R 必是单环，若不然 R 有真理想 I，I 必是 Γ- 环 M 的真理想，此与 M 的单性矛盾. 另由 $M \in \mathbf{M}_{br}$ 知 M 具有右单位元 $\sum_{i=1}^{k}[\alpha_i, e_i]$. 注意到现 $e = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i e_i \in R$，且 e 是 R 的右单位元. 据引理 1 知 e 是 R 的单位元，于是 $[e, e]$ 为 Γ- 环 M 的强单位元，从而 $M \in \mathbf{M}_{bis}$，可推得 $\mathbf{M}_{br} = \mathbf{M}_{bis}$. 类似可证 $\mathbf{M}_{bl} = \mathbf{M}_{bis}$，从而导出：

$$\mathbf{M}_{br} = \mathbf{M}_{bl} = \mathbf{M}_{brl} = \mathbf{M}_{brs} = \mathbf{M}_{bls} = \mathbf{M}_{brls} = \mathbf{M}_{bi} = \mathbf{M}_{bis}$$

故(1)成立.

为证后一个结论，作 $S_1 = \{$具有单位元的单环 $R\}$, $S_2 = \{$具有强单位元的单 Γ- 环 $M\}$. 若 $R \in S_1$，R 为具有单位元 e 的单环，则 R 解释为 Γ- 环 M 具有强单位元 $[e, e]$，且 $RR = R$，意味着 $\Gamma M = M = M\Gamma$. 从而 M 的理想必有 R 的理想，据此由 R 是单环知 M 为单 Γ- 环，故 $M \in S_2$. 反之若 $M \in S_2$，据(1)中证明知 $R \in S_1$. 综上 $S_1 = S_2$，故 $r_{bm}(R) = r_{bis}(M)$. 再利用(1)即得所需结论.

结合环 R 解释为 Γ- 环 M 的第二种途径为：取 $M=R$，$\Gamma=Z$(整数加群). 定义 $M\times\Gamma\times M\to M$ 的合成为：

$$xny=n(xy),\ \forall\, x,y\in M,\ \forall\, n\in\Gamma.$$

则 R 构成 Γ- 环 M. 同样可证得：

定理 5　在结合环 R 按第二种途径解释为 Γ- 环 M 所成的 Γ- 环类中有：

$$r_{br}=r_{bl}=r_{brl}=r_{brs}=r_{bls}=r_{brls}=r_{bi}=r_{bis},\tag{2}$$

且(2)中根即为 R 作为结合环的 Brown-McCoy 根.

下面讨论本文所述的幺单根与 Γ-环已有的一些具体根的关系. 首先要指出上述 8 个幺单根有 3 个已由他人引入：Booth 在[3]，[4]中导入了 Γ-环的 Brown-McCoy 根，右 Brown-McCoy 根，单根，并阐明了本文所述的 r_{bls}，r_{brs}，r_{brl}.

分别把 Γ-环的素根，局部幂零根，元素的强幂零性确定的根，诣零根，Jacobson 根记为：r_b，r_l，r_n，r_k，r_j. 这些根的定义和性质可参见[5]，[6]，[7]. 且有

引理 2　在 Γ- 环中有([7]，[8])

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & r_l \arrow[dr, dash] & & \\ r_b \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & r_k \arrow[r, dash] & r_j \\ & r_n \arrow[ur, dash] & & \end{tikzcd}$$

定理 6　$r_j<b_{bls}$，$r_j<r_{brs}$.

证明　在[6]中已阐明：Γ- 环 M 的右 Jacobson 根 $r_{jr}(M)=\{a\in M\,|\,\langle a\rangle$ 是右拟正则的$\}$，左 Jacobson 根 $r_{jl}(M)=\{a\in M\,|\,\langle a\rangle$ 是左拟正则的$\}$，且有 $r_{jr}=r_{jl}=r_j$. 在[3]中已阐明 $r_{bls}(M)$ 为 M 的所有(左)G- 正则理想之和. 比较左拟正则与(左)G- 正则定义即得：$r_{bls}\geqslant r_{jl}=r_j$. 同样可证得 $r_{brs}\geqslant r_{jr}=r_j$. 据推论 2：$r_{bls}(M_2)=M_2$，$r_{brs}(M_2)=0$，由 $r_{brs}\geqslant r_j$ 知 $r_j(M_2)=0$，从而 $r_{bls}>r_j$. 同样利用推论 1 可得 $r_{brs}>r_j$.

综合引理 2 和定理 6 可有

定理 7　在 Γ- 环中下图成立：

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & r_l \arrow[dr, dash] & & & r_{brs} \arrow[dr, dash] & \\ r_b \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & r_k \arrow[r, dash] & r_j \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & r_{brls} \\ & r_n \arrow[ur, dash] & & & r_{bls} \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

在结合环根论中如采用上述同样记号熟知的结果是

引理 3　在结合环中下图成立：

$$r_b \text{——} r_l \text{——} r_k \text{——} r_j \text{——} r_{bm}$$

比较定理 7 和引理 3，再注意到 Γ- 环根论中把 r_{bls} 称为(左)Brown-McCoy 根，r_{brs} 称为右 Brown-McCoy 根，就充分地显示了 Γ- 环根论比结合环根论更为复杂，内涵更为丰富，有其特色.

参 考 文 献

[1] N. J. Divisky, *Rings and Radicals*, Allen, Lodon, 1965.

[2] 张寿传、陈维新，Γ-环的一般根论和 Baer 根，浙江大学学报，25:6(1991)，719—724.
[3] G.L.Booth，*A Brown-McCoy radical for Γ-rings*, Quaestiones Math.，7:3(1984)，251—261.
[4] G.L.Booth，*A note on Brown-McCoy radicals of Γ-rings*, Periodica Math. Hungarica，18:1 (1987)，73—76.
[5] W.E.Coppage and J.Luh，*Radicals of gamma rings*, J. Math. Soc. Japan，23:1(1971)，40—52.
[6] S.Kyuno，*Notes on Jacobson radicals of gamma rings*, Math. Japonica，27:1(1982)，107—111.
[7] 陈维新，Γ-环元素的强幂零性所确定的根，数学年刊，14A:2(1993)，239—245.
[8] Guo Yuanchun，*Relation among radicals of Γ-rings and a result of Kyuno*, J. Math. Res. and Exposition，6:1(1986)，51—54.
[9] 刘绍学，环与代数，科学出版社，1983.

On the Radicals Determined by the Class of the Simple Γ-rings with Unity

Chen Weixin (Zhejiang University, Hangzhou 310027)
Zhang Shouchuan (Fudan University, Shanghai 200433)

Abstract

In the radical theory of the associative rings, it is known that the upper radical determined by the class of the simple rings with unity is Brown-McCoy radical. In this paper, we study this problem for Γ-rings. The upper radicals determined by the classed of the simple Γ-rings with unity become eight different radicals owing to the complexity of the unity in Γ-rings. The relations among these eight radicals are expounded. We also establish the relations between these radicals and other radicals of Γ-rings.

Keywords Γ-ring, unity, special class, upperadical.