第16卷第2期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 2
1996年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1996

主左理想由若干个幂等元生成的环*

吴贵花 章聚乐
(安徽师范大学数学系，芜湖 241000)

摘 要 环 R 称为左 PI-环，是指 R 的每个主左理想由有限个幂等元生成. 本文的主要目的是研究左 PI-环的 von Neumann 正则性，证明了如下主要结果：(1)环 R 是 Artin 半单的当且仅当 R 是正交有限的左 PI-环；(2)环 R 是强正则的当且仅当 R 是左 PI-环，且对于 R 的每个素理想 P，R/P 是除环；(3)环 R 是正则的且 R 的每个左本原商环是 Artin 的当且仅当 R 是左 PI-环且 R 的每个左本原商环是 Artin 的；(4)环 R 是左自内射正则环且 $\mathrm{Soc}({}_RR)\neq 0$ 当且仅当 R 是左 PI-环且它包含内射极大左理想；(5)环 R 是 MELT 正则环当且仅当 R 是 MELT 左 PI-环.

关键词 Artin 半单环，von Neumann 正则环，自内射环，正交有限环，正规环.
分类号 AMS(1991) 16E50/CCL O153.3

本文中涉及的环均指含单位元的结合环，环上的模均指单式模，环 R 称为 von Neumann 正则环[1]，是指对任意 $a\in R$，存在 $b\in R$ 使得 $a=aba$. 一个熟知的结果(参见[1]，定理 1.1)是：环 R 是正则的当且仅当 R 的每个主左(右)理想由一个幂等元生成. 环 R 称为左(右)PI-环[2]，是指 R 的每个主左(右)理想由有限个幂等元生成. 易知，正则环是左(右)PI-环，自然会问，左(右)PI-环是否是正则环?Tjukavkin 在1989年对这个问题给出了否定回答[3]，所以，PI-环类严格包含正则环类. 因此，研究 PI-环的 von Neumann 正则性是必要的.

环 R 称为正交有限环[4]，是指 R 中不存在无限多个彼此正交的幂等元素. 不难看出，正交有限环类严格包含完全环类与有有限 Goldie 维数环类. 得到：

定理 1 对于环 R，如下条件是等价的：

(1) R 是 Artin 半单环；

(2) R 是正交有限的左 PI-环；

(3) R 是正交有限的右 PI-环.

证明 (1)⇒(2) 与(1)⇒(3) 显然.

(2)⇒(1) 记 $S=\mathrm{Soc}({}_RR)$，于是要证 $S=R$. 如若不然，即 $S\neq R$，那么存在 R 的极大左理想 L 使得 $S\subseteq L\neq R$ 且 L 在 R 中是左本质的. 由于 R 是正交有限的，则 L 包含正交幂等元素集 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，且 L 中不含多于 n 个彼此正交的幂等元素. 记

$$e=e_1+e_2+\cdots+e_n\in L.$$

易知 $e^2=e$，且由 $R=Re\oplus R(1-e)$ 与 $Re\subseteq L$ 推得 $L=Re\oplus L\cap(R(1-e))$. 因为 L 在

* 1993年9月16日收到.

R 中是左本质的，且 $R(1-e)\neq 0$，所以有 $L\cap(R(1-e))\neq 0$. 由于 R 是左 PI-环，则存在 $f^2=f(\neq 0)\in L\cap(R(1-e))$. 令 $g=(1-e)f\in L\cap(R(1-e))$，于是有

$$g^2=(1-e)(f(1-e))f=(1-e)f^2=g\,;eg=0=ge.$$

由此便知 $g,e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 L 中彼此正交的幂等元素，从而由 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 的极大性推得 $g=0$. 因此有 $f=ef,f=f^2=(fe)f=0$. 这与 $f\neq 0$ 相矛盾，故 $S=R$，即 R 是 Artin 半单环.

(3)⇒(1) 是类似的.

环 R 称强正则的，如果对于任意的 $a\in R$，存在 $b\in R$ 使 $a=a^2b$. 易知，强正则环是正则环. 环 R 称为正规的[5]，如果 R 的所有幂等元均在 R 的中心之中. 对于环 R，$E(R)$，$N(R)$，$C(R)$ 分别表示 R 的所有幂等元素集，R 的所有幂零元素集，R 的中心. 对于 $x,y\in R$，记 $[x,y]=xy-yx$；对于 R 的非空子集 S 与 T，记

$$[S,T]=\{[x,y]\mid x\in S,y\in T\}.$$

由于正规环类严格包含强正则环类，所以下面命题是[6]中一些定理的有效推广.

命题 1 对于环 R，如下条件是等价的：

(1) R 是正规环.

(2) $[e,x]\in C(R)$，对于 $\forall\, e\in E(R)$，$\forall\, x\in N(R)$.

(3) $\forall\, e\in E(R)$，$\forall\, x\in N(R)$，存在自然数 $n\geqslant 2$ 使 $(ex)^n-ex\in C(R)$.

(4) $\forall\, e,f\in E(R)$，存在自然数 $n\geqslant 2$ 使得 $(ef)^n-ef\in C(R)$.

(5) 对于 $e,f\in E(R)$ 且 $ef\in E(R)$，有 $fe\in E(R)$.

(6) 对于 $e,f\in E(R)$ 且 $ef\in C(R)$，有 $fe\in C(R)$.

(7) $\forall\, e,f\in E(R)$，有 $[e,[f,e]]\in C(R)$.

(8) $\forall\, e,f\in E(R)$，存在自然数 $n\geqslant 2$ 使 $[e,f]^n-[e,f]\in C(R)$.

(9) 对于 $e,f\in E(R)$ 且 $ef\neq 0$，存在 $(R,\cdot)$ 的子群 H 使 $ef\in H$.

(10) 对于 $e,f\in E(R)$ 且 $[e,f]\neq 0$，存在 $(R,\cdot)$ 的子群 H 使 $[e,f]\in H$.

证明 (1) 推出其它各条是显然的.

(2)⇒(1) $\forall\, e\in E(R)$，易知 $eR(1-e)\cup(1-e)Re\subseteq N(R)$. 对于 $\forall\, x\in eR(1-e)$，易知 $x=ex,xe=0$. 由于 $[e,x]\in C(R)$，则有 $x=e[e,x]=[e,x]e=0$. 由此知 $eR(1-e)=0$. 同理可知 $(1-e)Re=0$. 所以 $e\in C(R)$，即 R 是正规环.

(5)⇒(1) $\forall\, e\in E(R)$，有 $e+x\in E(R)$，对于所有 $x\in(1-e)Re$. 由于 $1-e\in E(R)$，且 $(e+x)(1-e)=0\in E(R)$，所以 $x=(1-e)(e+x)\in E(R)$. 由此知 $x=x^2=0$，故 $(1-e)Re=0$. 同理可证 $eR(1-e)=0$，因此(1)成立.

(8)⇒(1) 对于 $\forall\, e\in E(R)$，$\forall\, x\in eR(1-e)$，易知 $x=[e,e+x]$；$[e,e+x]^n=0$，当 $n\geqslant 2$，由已知条件便有 $x=[e,e+x]^n-[e,e+x]\in C(R)$. 于是 $x=ex=xe=0$，所以 $eR(1-e)=0$. 同理可证 $(1-e)Re=0$，故 R 是正规环.

(9)⇒(1) 对于 $\forall\, e\in E(R)$，$x\in(1-R)Re$，易知

$$(1-e)+x\in E(R);\ e((1-e)+x)=0.$$

下证 $((1-e)+x)e=0$. 如果 $((1-e)+x)e\neq 0$，那么由已知条件便知有 $(R,\cdot)$ 的子群 H 使 $((1-e)+x)eg\in H$. 令 1_H 是子群 H 的单位元，则有 $g\in H$ 使 $((1-e)+x)eg=1_H$. 由此便知

$$((1-e)+x)e=((1-e)+x)e1_H=((1-e)+x)e((1-e)+x)eg=0.$$
这与$((1-e)+x)e\neq 0$相矛盾.所以

$$x=xe=((1-e)+x)e=0.$$

因此$(1-e)Re=0$,同理可证$eR(1-e)=0$,故(1)成立.

其余的,均可仿照[6]的证明方法得到,故从略.

推论 环R是正规的当且仅当$[E(R),E(R)]\subseteq C(R)$当且仅当对于$\forall\ \in e\in E(R),x\in N(R)$,存在$n\geqslant 2$使$(ef)^n-fe\in C(R)$.

环R称为左(右)TC-环[7],是指R的每个非零补左(右)理想是理想.环R称为强左(右)有界的[8],则是指R的每个非零左(右)理想包含非零理想.下面定理是[1]中定理3.2的推广.

定理2 对环R,下面条件是等价的:

(1) R是强正则环.

(2) R是左PI-,左TC-环.

(3) R是左PI-,右TC-环.

(4) R是左PI-,强左有界环.

(5) R是左PI-,强右有界环.

(6) R是左PI-环且满足命题1中等价条件.

(7) R是左PI-环,且对R的每个素理想P,R/P是除环.

证明 (1)推出其他各条,(4)⇒(2)与(5)⇒(3)是显然的.

(6)⇒(1) 对于$a\in R$,易知

$$Ra=Re_1+\cdots+Re_n,e_1,\cdots,e_n\in E(R)\subseteq C(R).$$

因此

$$RaR=Ra=RaRa. \qquad (*)$$

如果$l(a)+Ra\neq R$,则有R的极大左理想L使

$$l(a)+Ra\subseteq L\neq R.$$

由(*)知,$a=ba,b\in RaR=Ra\subseteq L$,于是$1-b\in l(a)\subseteq L,1=(1-b)+b\in L$.这与$L\neq R$相矛盾,因此$l(a)+Ra=R$.由此便知有$c\in R$使$a=a^2c$,故$R$是强正则环.

(2)⇒(1) 对于$e,f\in E(R)$,易知有

$$Ref\cap R(1-f)=0.$$

所以存在R的补左理想T使得$R(1-f)\subseteq T$,且$Ref\oplus T$在R中是左本质的,由于R是左TC-环,则T是R的理想,由此有$TRef\subseteq T\cap Ref=0$,所以

$$R(1-f)\subseteq T\subseteq l(ef),(1-f)ef=0,ef\in E(R).$$

这就证明了,R满足命题1中的等价条件,故R是强正则环.

(3)⇒(1) 类似于(2)⇒(1).

(7)⇒(1) 由于R是左PI-环,则R是完全左幂等的,从而R的Jacobson根$J(R)$为零,特别R是半素环,而R的每素商环是除环,因此R可嵌入到除环的亚直积之中,由此便知R是约化环,于是R满足命题1中的等价条件,故R是强正则的.

下面,将[1]中命题6.18推广到PI-环类上.

定理3 对于环R,下面条件是等价的:

(1) R 是正则环且它的左本原商环均是 Artin 的.

(2) R 是左 PI- 环且它的左本原商环均是 Artin 的.

(3) R 是左 PI- 环且所有齐次半单左 R- 模是内射的.

证明 (1)⇒(2) 与(1)⇒(3) 显然.

(2)⇒(1) 假定 M 是 R 的极大左理想,且记

$$P = \{r \in R \mid rR \subseteq M\}.$$

易知,P 是 R 的左本原理想. 根据已知条件,那么 R/P 是 Artin 的,显然,左 PI- 环的同态象也是左 PI- 环. 那么利用定理 1 便知,R/P 是 Artin 半单环,从而 R/M 是内射左 R/P- 模. 由于左 PI- 环是完全左幂等的,且 P 是 R 的双边理想,则不难推得 R/P 是平坦右 R- 模. 根据[1]中引理 6.17,则 R/M 是内射左 R- 模,即 R 是左 V- 环. 因为左 PI- 环是左、右非奇异的,根据[9]中定理与[10],则 R 是正则环.

(3)⇒(2) 假定 P 是 R 的左本原理想,往下证明 R/P 是正交有限的.

如若不然,那么 R/P 中存在无数个彼此正交幂等元素 $e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$ 于是

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty}(R/P)e_n \subseteq R/P$$

假定 A 是忠实单左 R/P- 模,且令 $A_n = A$,对于所有 $n = 1, 2, \cdots$,那么 $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$ 是齐次半单左 R- 模. 根据已知条件. 则 B 是内射的,由于 A 是忠实的,从而对于任意 n 存在 $x_n \in A_n$ 使 $e_n x_n \neq 0$,并且可以定义模同态.

$$f: \bigoplus_{n=1}^{\infty}(R/P)e_n \to B$$

使 $f(e_n) = e_n x_n$,对于所有 n. 由 B 的内射性质知有模同态 $\bar{f}: R/P \to B$ 使下图可换:

$$\begin{tikzcd} & B & \\ 0 \arrow[r] & \bigoplus_{n=1}^{\infty}(R/p)e_n \arrow[u, "f"] \arrow[r] & R/P \arrow[ul, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

于是存在 $x \in B$ 使 $e_n x_n = e_n x$,对于所有 n. 由于 $x \in B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$,那么存在自然数 m 使

$$x = t_1 + t_2 + \cdots + t_m, t_i \in A_i, i = 1, \cdots, m,$$

所以有

$$e_n x_n = e_n x = e_n \sum_{i}^{m} t_i = \sum_{i=1}^{m} e_n t_i \in \bigoplus_{i=1}^{m} A_i.$$

由此推得 $e_n x_n \in A_n \cap (A_1 \oplus \cdots \oplus A_n)$,故得到

$$e_n x_n = 0, \text{对于所有 } n > m.$$

这与对于任意 n 总有 $e_n x_n \neq 0$ 相矛盾,所以 R/P 是正交有限的.

根据定理 1,则 R/P 是 Artin 半单环,即(2) 成立.

下面的定理是对自内射正则环的有趣刻画.

定理 4 对于环 R,下面条件是等价的:

(1) R 是左自内射正则环且 $\mathrm{Soc}(R^R) \neq 0$.

(2) R 是左 PI- 环且 R 包含内射极大左理想.

(3) R 是半素环且 R 包含非奇异内射极大左理想.

证明 (1)⇒(2) 与(2)⇒(3) 显然.

(3)⇒(1) 假定 M 是半素环 R 的非奇异内射极大左理想，那么，存在 R 的极小左理想 l 使得 $R = M \oplus L$. 于是有 $e^2 = e(\neq 1) \in R$ 使 $M = Re, L = R(1-e)$.

当 $ML = 0$ 时，那么易知 $M = l(L)$，由此看出 M 是 R 的双边理想，$eR \subseteq Re, eR(1-e) = 0$. 考虑到 $(1-e)Re$ 是 R 的右理想. 且 $[(1-e)Re]^2 = 0$，则由 R 的半素性推得 $(1-e)Re = 0$. 由此可知，$e \in C(R)$. 因此对于任意 $a \in M$，有 $r \in R$ 使

$$a = re = (re)e = ere = ea.$$

根据[11]中引理 1.1，R/M 是平坦右 R-模. 利用[11]中命题 1.4，R/M 是内射左 R-模，所以由 $L \cong R/M$ 可知 L 是内射左 R-模. 当 $ML \neq 0$ 时，则有 $b(\neq 0) \in L$ 使 $Mb \neq 0$，因此有 $Mb = L$，可以定义模同态 $f: M \to L$; $x_1 \to xb$. 由于 $L = R(1-e)$ 是投射左 R-模，则有

$$M = \mathrm{Ker}(f) \oplus L_1, L_1 \cong L.$$

已知 M 是内射左 R-模，因此 L_1 是内射左 R-模，从而 L 是内射左 R-模. 总之有，R 是左自内射环，考虑到内射极大左理想 M 是左非奇异的，便不难看出 R 是左非奇异的. 根据[12]中定理 4.7，引理 4.1，则 R 是正则环，且 $\mathrm{Soc}(R^R) = \mathrm{Soc}({}^RR) \supseteq L \neq 0$. (1) 得证

环 R 称 MELT(MERT) 环[13]，是指 R 的每个极大本质左(右)理想是 R 的理想，用下述结果来结束本文.

定理 5 对于环 R，下面条件是等价的：

(1) R 是 MELT 正则环.

(2) R 是 MERT 正则环.

(3) R 是 MELT 左 PI-环.

(4) R 是 MERT 左 PI-环.

证明 (1)⇒(2) 与(1)⇒(3) 都是显然的.

(3)⇒(1) 记 $S = \mathrm{Soc}(R^R)$. 由于 R 是半素环，根据[14]中 8.6.2，那么 S 是 R 的正则理想，由于 R 是 MELT 左 PI-环，则不难看出 R/S 是左 PI-环，且它的每个极大左理想是理想. 仿照定理 2 的(6)⇒(1) 的证明方法，则 R/S 是强正则环.

类似地可证(4)⇒(2).

参 考 文 献

[1] K.R.Goodearl, *Von Neumann Regular Rings*, Pitman, London, 1979.

[2] S.S.Page, *Regular rings are very regular*, Canad. Math. Bull., 25(1982), 118.

[3] D.V.Tjukavkin, *Rings all of whose one-sided ideals are generated by idempotents*, Comm. in Algebra, 17(5)(1989), 1193—1198.

[4] P.Ara, & J.K.Park, *On continuous semiprimary rings*, Comm. in Algebra, 19(7)(1991), 1945—1957.

[5] H.Okamoto, J.Grosen & H.Komatsu, *Some generalzations of Boolean rings*, Math. J. Okayama Univ., 31(1989), 125—133.

[6] Zhang Jule and Du Xianneng, *Some remarks on von Neumann regular rings*, Kobe J. Math. (Japan), 9(2)(1992), 151—157.

[7] Zhang Jule and Du Xianneng, *On von Neumann regular rings and SF-rings*, Chinese Ann. Math.,

14A(1)(1993), 6—10.

[8] Zhang Jule and Du Xianneng, *Von Neumann regularity of SF-rings*, Comm. in Algebra, 21(7)(1993), 2445—2451.

[9] G. Baccella, *Von Neumann regularity of V-rings with Artinian primitive factor rings*, Proc. Amer. Math. Soc., 103(3)(1988), 747—749.

[10] Zhang Jule and Hu Weiqun, *MERT rings whose essential left ideals are idempotent*, Chinese Ann. Math., 15A(2)(1994), 204—207.

[11] V.S. Ramamurthi, *On the injectivity and flatness of certain cyclic modules*, Proc. Amer. Math. Soc., 48(1975), 21—25.

[12] Y. Utumi, *On continuous rings and self injective rings*, Trans. Amer. Math. Soc., 118(1965), 158—173.

[13] R.Y.C. Ming, *On V-rings and prime rings*, J. of Algebra, 62(1980), 13—20.

[14] C. Faith, *Algebra I: Rings, Modules, and Categories*, Springer-Verlag, 1981.

Rings All of Whose Left Ideals are Generated by Idempotents

Wu Guihua *Zhang Jule*

(Dept. of Math., Anhui Normal University, Wuhu 241000)

Abstract

A ring R is called a left PI-ring if every principal left ideal in R is generated by a finite set of idempotents. The aim of this paper is to study von Neumann regularity of left PI-rings. We prove the following results: (1) A ring R is artinian semisimple if and only if R is an orthogonally finite left PI-ring; (2) A ring R is strongly regular if and only if R is a left PI-ring and R/P is a division ring for any prime ideal P of R; (3) A ring R is regular and all left primitive factor rings of R are artinian if and only if R is a left PI-ring and all left primitive factor rings are artinian; (4) A ring R is a left self-injective regular ring and $\mathrm{soc}({}_RR)\neq 0$ if and only if R is a left PI-ring containing an injective maximal left ideal; (5) A ring R is an MELT regular ring if and only if R is an MELT left PI-ring. We also give some characterizations of normal rings.

Keywords Artinian semisimple rings, von Neumann regular rings, self-injective rings, orthogonally finite rings, normal rings.