第16卷第2期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 16 No. 2
1996年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1996

正定方阵的张量积*

谭 国 律

(上饶师范专科学校数学系，江西 334001)

摘　要　给出了正定方阵的合同根概念，并利用它，刻画了多个正定方阵的张量积仍为正定方阵的充要条件.

关键词　正定方阵，张量积，合同根.

分类号　AMS(1991) 15A/CCL O152.21

一　引　言

1970年，C. R. Johnson 在文[1]中研究了下述意义的正定方阵：对 n 阶实方阵 A，如果对任何非零的实 n 维列向量 X，均有 $X'AX>0$，则称 A 是正定方阵. 此后，有不少的学者就这类矩阵发表了文章，如文[2—4]就是其中的一些例子. 文[2]给出了正定方阵的合同标准形，曾在国内外引起较广泛反映(如美国《数学评论》(M. R. 87i: 15010)就对此作了评论). 与对称正定矩阵不同，正定方阵的张量积未必是正定方阵. 这样，研究在怎样的条件下，正定方阵的张量积还是正定方阵，就显得很有必要. 本文定义了正定方阵的合同根，并利用它，刻画了这样的充要条件. 本文提到的方阵均指实方阵.

二　预备知识

引理 1[2]　n 阶方阵 A 是正定方阵的充要条件是，存在 n 阶可逆方阵 P，使得

$$P'AP=\mathrm{diag}\{S_1,S_2,\cdots,S_k,I\},$$

$$S_i=\begin{pmatrix}1 & a_i\\ -a_i & 1\end{pmatrix},\quad i=1,2,\cdots,k;\ a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_k>0.$$

定理 1　引理1中的 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是由 A 所唯一确定的.

证明　假设还有 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_t>0$，使得

$$A\simeq\mathrm{diag}\{H_1,H_2,\cdots,H_t,I\},\quad H_j=\begin{pmatrix}1 & b_j\\ -b_j & 1\end{pmatrix},\ j=1,2,\cdots,t,$$

其中 $A\simeq B$ 表示矩阵 A 合同于矩阵 B，I 是一个适当阶数的单位矩阵，则存在可逆方阵 Q，使得

$$Q'\mathrm{diag}\{S_1,\cdots,S_k,I\}Q=\mathrm{diag}\{H_1,\cdots,H_t,I\}.$$

* 1993年11月19日收到. 江西省自然科学基金资助.

把上式两边取转置后再与上式相加可得 $QQ' = I$. 所以, Q 是正交矩阵,从而

$$\operatorname{diag}\{S_1, \cdots, S_k, I\} \text{ 与 } \operatorname{diag}\{H_1, \cdots, H_t, I\}$$

是相似的. 所以 $t = k$; $b_i = a_i, i = 1, 2, \cdots, k$. □

定义 引理 1 中的 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 称为正定方阵 A 的合同根.

为了方便,规定对称正定矩阵的合同根全为零. 这样,正定方阵为对称正定矩阵的充要条件是它的合同根只有零.

引理 2 实函数 $f(x, y) = \dfrac{x + y}{1 - xy}$ 有以下性质:

(1) 当 $x, y \geqslant 0, xy < 1$ 时, $f(x, y) \geqslant \max\{x, y\}$;

(2) 当 $xy < 1$ 时, $f(x, y)$ 关于 x 和 y 均是增函数.

记 $f(x_1) = x_1, f(x_1, x_2, x_3) = f(f(x_1, x_2), x_3)$, 且当 $n \geqslant 4$ 时,记

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(f(x_1, \cdots, x_{n-1}), x_n).$$

令 $\varepsilon^{(n)} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n), \varepsilon_i = 1$ 或 $-1, \varepsilon^{(n)} = (\varepsilon^{(n-1)}, \varepsilon_n)$. 又记

$$f_{\varepsilon^{(2)}}(x_1, x_2) = |f(\varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2)|,$$

$$f_{\varepsilon^{(n)}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = |f(f_{\varepsilon^{(n-1)}}(x_1, \cdots, x_{n-1}), \varepsilon_n x_n)|, n = 3, 4, \cdots$$

引理 3 设诸 $x_j > 0$, 且 $f(x_1, \cdots, x_{i-1}) x_i < 1, i = 2, 3, \cdots, n$, 则

(1) $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 关于每个 x_j 都是递增的;

(2) $f_{\varepsilon^{(n)}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

证明 归纳地运用引理 2 (2) 可证得(1).

由已知,不难明了,

$$f(x_1, \cdots, x_t) > 0, t \geqslant 2,$$

$$f_{\varepsilon^{(2)}}(x_1, x_2) = \left|\frac{\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2}{1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 x_1 x_2}\right|.$$

当 $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$ 时, $f_{\varepsilon^{(2)}}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$.

当 $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1$ 时,

$$f_{\varepsilon^{(2)}}(x_1, x_2) = \frac{|x_1 - x_2|}{1 + x_1 x_2} \leqslant \max\{x_1, x_2\} \leqslant f(x_1, x_2).$$

由于 $f_{\varepsilon^{(n)}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left|\dfrac{f_{\varepsilon^{(n-1)}}(x_1, \cdots, x_{n-1}) + \varepsilon_n x_n}{1 - \varepsilon_n x_n f_{\varepsilon^{(n-1)}}(x_1, \cdots, x_{n-1})}\right|$, 故当 $\varepsilon_n = 1$ 时,

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon^{(n)}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \frac{f_{\varepsilon^{(n-1)}}(x_1, \cdots, x_{n-1}) + x_n}{1 - x_n f_{\varepsilon^{(n-1)}}(x_1, \cdots, x_{n-1})} \\ &\leqslant \frac{f(x_1, \cdots, x_{n-1}) + x_n}{1 - x_n f(x_1, \cdots, x_{n-1})} \\ &= f(x_1, x_2, \cdots, x_n); \end{aligned}$$

当 $\varepsilon_n = -1$ 时,

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon^{(n)}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \frac{|f_{\varepsilon^{(n-1)}}(x_1, \cdots, x_{n-1}) - x_n|}{1 + x_n f_{\varepsilon^{(n-1)}}(x_1, \cdots, x_{n-1})} \\ &\leqslant \max\{f_{\varepsilon^{(n-1)}}(x_1, \cdots, x_{n-1}), x_n\} \\ &\leqslant \max\{f(x_1, \cdots, x_{n-1}), x_n\} \\ &\leqslant f(x_1, x_2, \cdots, x_n). \end{aligned}$$

□

如下定义数列$\{d_k\}$：

$$d_0=1, d_k=\frac{d_{k-1}}{1+\sqrt{1+d_{k-1}^2}}, \quad k=1,2,\cdots.$$

引理 4 (1) $\{d_k\}$ 单调递减，且以零为极限；当 $k\geqslant 1$ 时，$0<d_k<1$；

(2) $d_{k-1}=\dfrac{2d_k}{1-d_k^2}$.

引理 5 设 $0<a<1$，则 $f_{2^i}(a)=f(\overbrace{a,a,\cdots,a}^{2^i\text{个}})<1 (i=1,2,\cdots,k)$ 的充要条件是

$$a<d_k.$$

证明 首先，对于 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 不难证明：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(f(x_1,\cdots,x_i),f(x_{i+1},\cdots,x_n)), \quad 0\leqslant i\leqslant n.$$

由 $f_{2^i}(a)<1 (i=1,2,\cdots,k)$ 可知 $f_{2^t}(a)>0, t=1,2,\cdots,k$.

由 $f_{2^k}(a)=\dfrac{2f_{2^{k-1}}(a)}{1-f_{2^{k-1}}^2(a)}<1$ 及 $f_{2^{k-1}}(a)<1$ 立得：$f_{2^{k-1}}(a)<d_1$.

同理，$f_{2^{k-2}}(a)<d_2,\cdots$. 最终有：$f_2(a)<d_{k-1}$，从而 $a<d_k$.

反之，由于 $0<a<1$，$a<d_k$ 蕴含了每个 $f_{2^i}(a)>0$，$1\leqslant i\leqslant k$. 故当 $a<d_k$ 时，反推上去即可证得每个 $f_{2^i}(a)<1$，$1\leqslant i\leqslant k$. □

三 结 果

引理 6 设 $a,b>0$，记 $M=\begin{pmatrix}1 & a\\ -a & 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1 & b\\ -b & 1\end{pmatrix}$，则 M 是正定方阵的充要条件是 $ab<1$. 当 M 是正定方阵时，它的合同根为 $\dfrac{a+b}{1-ab}$，$\dfrac{|a-b|}{1+ab}$.

证明

$$(x_1x_2x_3x_4)M(x_1x_2x_3x_4)'=(x_1x_4)\begin{pmatrix}1 & ab\\ ab & 1\end{pmatrix}(x_1x_4)'+(x_2x_3)\begin{pmatrix}1 & -ab\\ -ab & 1\end{pmatrix}(x_2x_3)',$$

所以 M 是正定方阵的充要条件是 $\begin{pmatrix}1 & ab\\ ab & 1\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，此即证得本引理的前半部分.

设 $ab<1$，则 $M\simeq I+H$，其中

$$H=\begin{pmatrix}0 & b & \dfrac{a(1+b^2)}{d} & 0\\ -b & 0 & 0 & \dfrac{a(1+b^2)}{d}\\ -\dfrac{a(1+b^2)}{d} & 0 & 0 & \dfrac{b(1+a^2)+a^2b(1+b^2)}{d^2}\\ 0 & -\dfrac{a(1+b^2)}{d} & -\dfrac{b(1+a^2)+a^2b(1+b^2)}{d^2} & 0\end{pmatrix},$$

$d=\sqrt{1-a^2b^2}$.

经计算，H 的特征多项式为

$$f_H(\lambda)=\frac{1}{d^4}[(1-a^2b^2)^2\lambda^4+2(a^2+b^2+4a^2b^2+a^2b^4+a^4b^2)\lambda^2+(a^2-b^2)^2].$$

所以 H 的四个纯虚数特征值是：

$$\pm\frac{a+b}{1-ab}\sqrt{-1},\quad \pm\frac{a-b}{1+ab}\sqrt{-1}.$$

引理 7 (1) 若 B 是对称正定矩阵，则 $A\otimes B$ 是正定方阵的充要条件是 A 为正定方阵；

(2) 若 B 和 $A\otimes B$ 均是正定方阵，则 A 必是正定方阵.

证明 由[3]中的定理 6 即可证得(1).

设 $X\neq 0$，让 $Y=(1,1,\cdots,1)'$，则 $X\otimes Y\neq 0$，从而

$$(X\otimes Y)'(A\otimes B)(X\otimes Y)>0.$$

又 $(X\otimes Y)'(A\otimes B)(X\otimes Y)=(X'AX)(Y'BY)$，$Y'BY>0$，所以 $X'AX>0$. 即 A 是正定方阵.

引理 8 分块对角阵 $A=\operatorname{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}$ 是正定方阵的充要条件是每个 A_i 都是正定方阵.

引理 9 设分块对角阵 $A_i=\operatorname{diag}\{A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{is_i}\}$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$$\bigotimes_{i=1}^{n}A_i\simeq\operatorname{diag}\{A_{1j_1}\otimes A_{2j_2}\otimes\cdots\otimes A_{nj_n};j_i=1,2,\cdots,s_i,i=1,2,\cdots,n\}.$$

引理 10 设正定方阵 A、B 的合同根分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_t$，则 $A\otimes B$ 仍是正定方阵的充要条件是

$$a_ib_j<1,i=1,2,\cdots,k;\ j=1,2,\cdots,t.$$

注 由以上引理，可得结论：如果正定方阵 A、B 的最大合同根分别为 a 和 b，则 $A\otimes B$ 是正定方阵的充要条件是 $ab<1$. 特别，$A\otimes A$ 仍是正定方阵的充要条件是 $a<1$.

定理 2 设正定方阵 A_i 的最大合同根为 a_i，$i=1,2,\cdots,n$，则 $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 仍是正定方阵的充要条件是

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_j)a_{j+1}<1,j=1,2,\cdots,n-1.$$

证明 设

$$A_i\simeq\operatorname{diag}\{S_{i1},S_{i2},\cdots,S_{is_i},I\},$$

$$S_{ij_i}=\begin{bmatrix}1 & a_{ij_i}\\ -a_{ij_i} & 1\end{bmatrix};j_i=1,2,\cdots,s_i;a_i=a_{i1}\geqslant a_{i2}\geqslant\cdots\geqslant a_{is_i}>0.$$

则由引理 9 知 $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i\simeq\operatorname{diag}\{S_1\otimes\cdots\otimes S_n;S_i$ 是某个 S_{ij_i} 或 $I,i=1,2,\cdots,n\}$.

当 $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 是正定方阵时，由引理 7 和 8 知，$S_{11}\otimes S_{21}\otimes\cdots\otimes S_{j+1,1}$ 都是正定方阵，$1\leqslant j\leqslant n-1$.

反复运用引理 6 可得，$f(a_1,a_2,\cdots,a_j)$ 是 $S_{11}\otimes S_{21}\otimes\cdots\otimes S_{j1}$ 的一个合同根，故由引理 10 知

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_j)a_{j+1}<1,j=1,2,\cdots,n-1.$$

反之，若能证得每个 $S_{1j_1}\otimes\cdots\otimes S_{nj_n}$ 均是正定方阵，则由于 $A\otimes B\simeq B\otimes A$，再结合引理 7 即可证得每个 $S_1\otimes\cdots\otimes S_n$ 都是正定方阵，从而再由引理 8 就证明了 $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 是正定方阵.

由于$f(a_{1j_1})a_{2j_2} \leqslant f(a_1)a_2 < 1$，故$S_{1j_1} \otimes S_{2j_2}$是正定方阵. $S_{1j_1} \otimes S_{2j_2}$的合同根具有形式

$$f_{\varepsilon^{(2)}}(a_{1j_1}, a_{2j_2}).$$

由引理 3，

$$f_{\varepsilon^{(2)}}(a_{1j_1}, a_{2j_2})a_{3j_3} \leqslant f(a_1, a_2)a_3 < 1,$$

从而$S_{1j_1} \otimes S_{2j_2} \otimes S_{3j_3}$是正定方阵. 这样一直下去，最后可证得$\bigotimes_{i=1}^{n} S_{ij_i}$是正定方阵. □

系 2.1　设正定方阵A_i的最大合同根为a_i，则当

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_j)a_{j+1} < 1 \ (j = 1, 2, \cdots, n-1)$$

时，$A_1, A_2, \cdots, A_n$的 Hadamard 积$A_1 \circ A_2 \circ \cdots \circ A_n$仍是正定方阵.

证明　由于$A_1 \circ A_2 \circ \cdots \circ A_n$是$A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n$的一个主子阵，再由[3]的命题 4，即可得此系.

系 2.2　设A和B都是正定方阵，且$\bigotimes_1^n A$和$\bigotimes_1^n B$也都是正定方阵，则对$0 \leqslant k \leqslant n$，

$$\bigotimes_1^{n-k} A \otimes \bigotimes_1^{k} B$$

是正定方阵.

证明　记A、B的最大合同根分别为a和b，且$a \geqslant b$. 由于

$$f_s(a)a < 1, \quad s = 1, 2, \cdots, n-k-1;$$

$$f(\underbrace{a, \cdots, a}_{(n-k)\text{个}}, \underbrace{b, \cdots, b}_{(s-n+k)\text{个}})b \leqslant f_s(a)a < 1, \quad s = n-k, n-k+1, \cdots, n-1,$$

故由定理 2 即得.

由于对称正定矩阵的合同根为零，由定理 2 立得下面著名的结论.

系 2.3　设A_i为对称正定矩阵，则$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$仍是对称正定矩阵.

定理 3　设正定方阵A的最大合同根为a，$0 < a < 1$，则$\bigotimes_1^{2^{k+1}} A$是正定方阵的充要条件是

$$a < d_k.$$

证明　若$\bigotimes_1^{2^{k+1}} A$是正定方阵，则$\bigotimes_1^{2^j} A$也是，$j = 1, 2, \cdots, k+1$，而$\bigotimes_1^{2^j} A$的最大合同根为$f_{2^j}(a)$. 由引理 10 后面注知，$f_{2^t}(a) < 1$，$t = 1, 2, \cdots, k$. 由引理 5 即得$a < d_k$.

反之，若$a < d_k$，则$f_{2^t}(a) < 1$，$t = 1, 2, \cdots, k$.

由$a < d_k < 1$知$\bigotimes_1^{2} A$是正定方阵.

由$f_2(a) < 1$知$\bigotimes_1^{4} A$是正定方阵；

……

由$f_{2^k}(a) < 1$知$\bigotimes_1^{2^{k+1}} A$是正定方阵. □

系 3.1　设A是正定方阵. 若对任何自然数k，$\bigotimes_1^{k} A$均是正定方阵，则A是对称正定矩阵.

证明　因这时A的最大合同根必须为零.

参 考 文 献

[1] C.R. Johnson, *Positive definite matrices*, Amer. Math. Monthly, 1970,77:259—264.

[2] 李炯生，实方阵的正定性，数学的实践与认识，3(1985)，67—73.

[3] 屠伯埙，亚正定阵理论(Ⅰ)，数学学报，33(4)(1990)，462—471.

[4] 佟文廷，广义正定矩阵，数学学报，27(6)(1984)，801—810.

Tensor Product of Positive Definite Square Matrices

Tan Guolu

(Dept. of Math., Shangrao Teachers' College, Jiangxi 334001)

Abstract

Necessary and sufficient conditions are proved for the tensor product of positive definite square matrices to be positive definite.

Keywords positive definite square matrix, tensor product, equivalent root.