第16卷第2期　　数学研究与评论　　Vol. 16 No. 2
1996年5月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　May 1996

一个新的极大极小定理及应用*

张　石　生
（四川大学数学系，成都 610064）

吴　鲜　　　　汪达成
（云南师范大学数学系）（四川重庆师专数学系）

摘　要　本文得到一个新的极大极小定理及其几个等价形式．作为这一结果的应用，我们得到区间空间上的 Ky Fan 型截口定理，匹配定理和几个集值映象的不动点定理．

关键词　极大极小定理，区间空间，强 Dadekind 完备区间空间．

分类号　AMS(1991) 49K35，54H25/CCL

1　引言及预备知识

极大极小问题是非线性泛函分析中的一个热门课题，它对经济数学有重要的应用．

1928 年 Von Neumann[6] 给出下面的结果：

定理A　设 M,N 是有限维单形，$f:M\times N\to R$ 是一连续映象且关于第一变量为拟凹，关于第二变量为拟凸，则　$\sup\limits_{x\in M}\inf\limits_{y\in N} f(x,y)=\inf\limits_{y\in N}\sup\limits_{x\in N} f(x,y)$．

后来，许多数学家对此定理进行了多种形式的推广和改进．1982 年 Komornik[5] 得出了下面的结果：

定理B　设 X 是一紧的区间空间，Y 是一实 Hausdorff 线性拓扑空间中的凸子集，Z 是一完备的线性序空间；设 $f:X\times Y\to Z$ 是一映象满足条件：

(i)　$\forall\, y\in Y, f(\cdot,y)$ 是上半连续和拟凹的；

(ii)　$\forall\, x\in X, f(x,\cdot)$ 是拟凸的，而且在 Y 的任何区间上是上半连续的，

则　$\max\limits_{x\in X}\inf\limits_{y\in Y} f(x,y)=\inf\limits_{y\in Y}\max\limits_{x\in X} f(x,y)$．

本文的目的是进一步推广定理A和定理B并给出几个等价形式．作为应用，得出区间空间中的Ky Fan型的截口定理，匹配定理和不动点定理．本文结果改进和发展了[1,3,4－7]中的相应结果．

定义 1.1[8]　设 X 是一拓扑空间，若存在映象 $[\cdot,\cdot]:X\times X\to 2^X$，使得 $\forall\, x_1,x_2\in X$ 有 $x_1,x_2\in[x_1,x_2]=[x_2,x_1]$ 且 $[x_1,x_2]$ 是连通的，则称 X 为区间空间，且 $[x_1,x_2]$ 称为 x_1,x_2 对应的区间．

定义 1.2[8]　区间空间 X 的子集 K 称为 W-凸的，如果 $\forall\, x_1,x_2\in K$，有 $[x_1,x_2]\subset K$．

定义 1.3[2]　若线性序空间 Z 的每一非空子集均有最小上界，则称 Z 为完备线性序空间．

* 1993年8月27日收到．国家自然科学基金资助项目．

以下 Z 恒表一完备的线性序空间.

定义 1.4[5] 设 X 为一拓扑空间,Z 为一线性序空间,映象 $f:X\to Z$ 称为上半连续的(或下半连续的),如果对任一 $z\in Z$,集合 $\{x\in X:f(x)\geqslant z\}$(相应地 $\{x\in X:f(x)\leqslant z\}$)为 X 中的闭集.

定义 1.5[5] 设 X 是一区间空间,映象 $f:X\to Z$ 称为 W-拟凸(W-拟凹)的,如果对任一 $z\in Z$,集合 $\{x\in X:f(x)\leqslant z\}$($\{x\in X:f(x)\geqslant z\}$)为 X 中的 W-凸集.

定义 1.6[8] 区间空间 X 称为 Dadekind 完备的,如果 $\forall x_1,x_2\in X$ 及任意的 W-凸集 H_1,$H_2\subset X$,当 $x_j\in H_j$,$j=1,2$ 且 $[x_1,x_2]\subset H_1\cup H_2$,则必存在 $k\in\{1,2\}$ 和 $\bar{x}\in H_k$ 使得 $[x_i,\bar{x}):=[x_i,\bar{x}]\backslash\{\bar{x}\}\subset H_i$,其中 $i\in\{1,2\}\backslash\{k\}$.

定义 1.7 Dadekind 完备的区间空间 X 称为强 Dadekind 完备的,如果对任意的 $x_1,x_2\in X$,及任意有限个点 $\{u_1,\cdots,u_n\}\subset[x_2,x_1)$ 有 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}[u_i,x_1)\neq\varnothing$.

命题 1.1 设 Y 是一 Hausdorff 拓扑向量空间的凸子集,$\forall y_1,y_2\in Y$,令 $[y_1,y_2]=\mathrm{co}\{y_1,y_2\}$,则 Y 是一强 Dadekind 完备的区间空间.

命题 1.2 (i) 在区间空间中,W-凸集是连通的;

(ii) 在区间空间中,任意多个 W-凸集的交是 W-凸集(空集视为连通集和 W-凸集).

命题 1.3[5] 如果 X 是紧集,$f:X\to Z$ 为上半连续映象,则存在 $x_0\in X$,使得 $f(x_0)=\sup\limits_{x\in X}f(x)$. 如果 X 是任一拓扑空间,$\{f_i\}_{i\in I}$ 是 X 到 Z 的一族上半连续函数,则 $\inf\limits_{i\in I}f_i$ 也是上半连续的.

定义 1.8 区间空间 X 的子集 M 称为是区间闭(开)的,如果对 X 的任一区间 $[x_1,x_2]$,$M\cap[x_1,x_2]$ 为 $[x_1,x_2]$ 中的相对闭(开)集.

命题 1.4 设 X 是一区间空间,$f:X\to Z$. 则 f 是 W-拟凸(凹)$\Leftrightarrow\forall x_1,x_2\in X$ 及 $\forall x\in[x_1,x_2]$ 有 $f(x)\leqslant\max\{f(x_1),f(x_2)\}$($f(x)\geqslant\min\{f(x_1),f(x_2)\}$).

以下用 $\mathscr{F}(X)$ 表 X 中一切非空有限子集的族. 若 $F:X\to 2^Y$ 为一集值映象,则用 $F^C(x)$ 表示 $Y\backslash F(x)$.

记 $\mathscr{C}(X,Y)$ 为 X 到 Y 的一切连续映象的集合;并令 $\mathscr{C}^*(X,Y):=\{s\in\mathscr{C}(X,Y):s^{-1}$ 映 Y 中的连通集为 X 中的连通集$\}$.

2 极大极小定理

定理 2.1 设 X 是一紧区间空间,Y 是一强 Dadekind 完备的 Hausdorff 区间空间,$f:X\times Y\to Z$,其中 Z 是一完备的线性序空间. 再设

(i) $\forall A\in\mathscr{F}(Y)$ 及 $\forall z\in Z$, $\bigcap\limits_{y\in A}\{x\in X:f(x,y)\geqslant z\}$ 连通;

(ii) $\forall y\in Y$,$f(\cdot,y)$ 是上半连续的;

(iii) $\forall x\in X$,$f(x,\cdot)$ 是 W-拟凸的且在 Y 的任一区间上是上半连续的,

则 $$\max_{x\in X}\inf_{y\in Y}f(x,y)=\inf_{y\in Y}\max_{x\in X}f(x,y).$$

证明 令 $z_*=\max\limits_{x\in X}\inf\limits_{y\in Y}f(x,y)$,$z^*=\inf\limits_{y\in Y}\max\limits_{x\in X}f(x,y)$,

$$F(y)=\{x\in X:f(x,y)\geqslant z^*\},\quad\forall y\in Y.$$

若$\exists\ \bar{y}\in Y$使$F(\bar{y})=\varnothing$,则$\forall\ x\in X$,有$f(x,\bar{y})<z^*$.由条件(ii)和X紧及命题1.3(ii)知$\max\limits_{x\in X}f(x,\bar{y})<z^*$,从而$z^*=\inf\limits_{y\in Y}\max\limits_{x\in X}f(x,y)<z^*$矛盾.由此知$\forall\ y\in Y,F(y)\neq\varnothing$.另由条件(ii)和$X$的紧性知$\forall\ y\in Y,F(y)$为$X$中的非空紧集.

设$\{F(y):y\in Y\}$中任意n个元之交非空,下证$\{F(y):y\in Y\}$中任意$n+1$个元之交也非空.

设相反,存在$y_1,\cdots,y_{n+1}\in Y$,使得$\bigcap\limits_{i=1}^{n+1}F(y_i)=\varnothing$.令$H=\bigcap\limits_{i=3}^{n+1}F(y_i)$,则$\forall\ y\in Y,H\cap F(y)$为非空紧集.另由条件(i)知$H\cap F(y)$为连通集,而且显然有

$$(H\cap F(y_1))\cap(H\cap F(y_2))=\varnothing. \tag{2.1}$$

因$H\cap F(y_i),i=1,2$均为闭集,故$H\cap F(y_1)$和$H\cap F(y_2)$分离.又由$f(x,\cdot)$的W-拟凸性易知$\forall\ u,v\in Y$恒有

$$F(y)\subset F(u)\cup F(v),\quad \forall\ y\in[u,v]. \tag{2.2}$$

特别有

$$F(y)\subset F(y_1)\cup F(y_2),\quad \forall\ y\in[y_1,y_2]. \tag{2.3}$$

从而$H\cap F(y)\subset(H\cap F(y_1))\cup(H\cap F(y_2)),\forall\ y\in[y_1,y_2]$.于是由$H\cap F(y)$的非空连通性知

$$H\cap F(y)\subset H\cap F(y_1)\text{或}H\cap F(y)\subset H\cap F(y_2),\ \forall\ y\in[y_1,y_2].$$

于是令$E_i=\{y\in Y:H\cap F(y)\subset H\cap F(y_i)\},i=1,2$.显然有$y_i\in E_i,i=1,2$且$[y_1,y_2]\subset E_1\cup E_2$,而且

$$(H\cap F(u))\cup(H\cap F(v))\subset H\cap F(y_i),\ \forall\ u,v\in E_i,i=1,2.$$

于是由(2.2)知,$\forall\ y\in[u,v]$有

$$H\cap F(y)\subset(H\cap F(u))\cup(H\cap F(v))\subset H\cap F(y_i).$$

故$y\in E_i$,从而$[u,v]\subset E_i$,故E_i是W-凸的.再由Y的Dadekind完备性知,存在$k\in\{1,2\}$和$y_0\in E_k$,使得$[y_i,y_0)\subset E_i$,其中$i\in\{1,2\}\backslash\{k\}$.不妨设$k=1$,从而$y_0\in E_1,[y_2,y_0)\subset E_2$,故

$$H\cap F(y_0)\subset H\cap F(y_1). \tag{2.4}$$

因$[y_2,y_0]$连通且$[y_2,y_0]=[y_2,y_0)\cup\{y_0\}$及$\{y_0\}$闭知,$y_0\in\overline{[y_2,y_0)}$.故存在网$\{y_\alpha\}_{\alpha\in I}\subset[y_2,y_0)$使得$y_\alpha\to y_0$.

下证$\{H\cap F(y):y\in[y_2,y_0)\}$具有限交性质.

事实上,$\forall\ u\in[y_2,y_0)$和$\forall\ y\in[u,y_0)\cap[y_2,y_0)$,由(2.2)有$F(y)\subset F(u)\cup F(y_0)$,故

$$H\cap F(y)\subset(H\cap F(u))\cup(H\cap F(y_0)).$$

又因$[y_2,y_0)\subset E_2,y\in[y_2,y_0)$,故$H\cap F(y)\subset H\cap F(y_2)$,从而由(2.4)和(2.1)知

$$H\cap F(y)\subset[(H\cap F(u))\cup(H\cap F(y_0))]\cap H\cap F(y_2)=H\cap F(u).$$

于是$\forall\ \{u_1,\cdots,u_n\}\subset[y_2,y_0)$,由$Y$是强Dadekind完备的,故$\bigcap\limits_{i=1}^{n}[u_i,y_0)\cap[y_2,y_0)\neq\varnothing$.故$\exists\ \bar{y}\in Y$使得$\bar{y}\in[u_i,y_0)\cap[y_2,y_0),i=1,\cdots,n$.因而有

$$H\cap F(\bar{y})\subset H\cap F(u_i),\ i=1,2,\cdots,n.$$

因$H\cap F(\bar{y})\neq\varnothing$,故$\bigcap\limits_{i=1}^{n}H\cap F(u_i)\neq\varnothing$.这就证明了集族$\{H\cap F(y):y\in[y_2,y_0)\}$具有限

交性质. 因 $H\cap F(y)$ 是紧的, $\forall\, y\in Y$, 故 $\bigcap\limits_{y\in[y_2,y_0)} H\cap F(y)\neq\varnothing$, 从而存在 $x_0\in\bigcap\limits_{y\in[y_2,y_0)} H\cap F(y)\subset\bigcap\limits_{\alpha\in I} H\cap F(y_\alpha)$. 故 $\forall\,\alpha\in I$, $x_0\in F(y_\alpha)$, 即 $\forall\,\alpha\in I$, $f(x_0,y_\alpha)\geqslant z^*$. 因 $y_\alpha\to y_0$, 且 $f(x_0,\cdot)$ 在 $[y_2,y_0)$ 上是上半连续的(关于相对拓扑), 故 $f(x_0,y_0)\geqslant z^*$.

另一方面, $x_0\in H\cap F(y_2)$, 故由(2.1)知 $x_0\notin H\cap F(y_1)$. 因 $H\cap F(y_0)\subset H\cap F(y_1)$, 故 $x_0\notin H\cap F(y_0)$. 因 $x_0\in H$, 故 $x_0\notin F(y_0)$, 即 $f(x_0,y_0)<z^*$. 这与已证明的 $f(x_0,y_0)\geqslant z^*$ 相矛盾. 由此矛盾知 $\{F(y):y\in Y\}$ 中任意 $n+1$ 个元之交是非空的, 从而由归纳法知 $\{F(y):y\in Y\}$ 具有限交性质. 因对每一 $y\in Y$, $F(y)$ 是紧的, 故 $\bigcap\limits_{y\in Y}F(y)\neq\varnothing$. 从而存在 $\bar{x}\in F(y)$, $\forall\, y\in Y$, 即 $f(\bar{x},y)\geqslant z^*$, $\forall\, y\in Y$. 从而可得 $z_*\geqslant z^*$. 另一方面显然有 $z^*\geqslant z_*$, 故 $z_*=z^*$. 证毕.

由定理 2.1 可得下面的

推论 2.2　设 X 是一紧区间空间, Y 是一强 Dadekind 完备的 Hausdorff 区间空间, $f:X\times Y\to Z$ 是一映象满足下面的条件:

(i)　$\forall\, y\in Y$, $f(\cdot,y)$ 是上半连续和 W-拟凹的;

(ii)　$\forall\, x\in X$, $f(x,\cdot)$ 是 W-拟凸的而且在 Y 的任何区间上是上半连续的,

则　$\max\limits_{x\in X}\inf\limits_{y\in Y} f(x,y)=\inf\limits_{y\in Y}\max\limits_{x\in X} f(x,y)$.

注　由命题 1 知, 推论 2.2 包含 Komornike[5] 中的定理 3(即本文中定理 B)为特例, 因而也包含了 Von Neumann[6] 中的著名的极大极小定理(即本文定理 A).

3　极大极小定理的等价形式

可证下面的定理等价于定理 2.1.

定理 3.1　设 X 是一紧区间空间, Y 是一强 Dadekind 完备的 Hausdorff 区间空间, $F:Y\to 2^X$ 是一具非空闭值的集值映象. 如果下列条件满足:

(i)　$\forall\, A\in\mathscr{F}(Y)$, $\bigcap\limits_{y\in A}F(y)$ 连通;

(ii)　$\forall\, x\in X$, $Y\backslash F^{-1}(x)$ 是 W-凸;

(iii)　$\forall\, x\in X$, $F^{-1}(x)$ 是区间闭的,

则 $\bigcap\limits_{y\in Y}F(y)\neq\varnothing$.

由定理 3.1 可得下面的推论 3.2, 而且可证它与推论 2.2 等价.

推论 3.2　设 X, Y 与定理 3.1 中的相同. 设 $F:Y\to 2^X$ 为具非空 W-凸闭值的映象. 如果

(i)　$\forall\, x\in X$, $Y\backslash F^{-1}(x)$ 是 W-凸的;

(ii)　$\forall\, x\in X$, $F^{-1}(x)$ 是区间闭的,

则 $\bigcap\limits_{y\in Y}F(y)\neq\varnothing$.

可证下面的定理 3.3 与推论 3.2 等价.

定理 3.3　设 X, Y 与推论 3.2 中的相同, 设 $M\subset X\times Y$ 是一非空集. 如果

(i)　$\forall\, y\in Y$, 截口 $M(y):=\{x\in X:(x,y)\in M\}$ 非空 W-凸闭;

(ii)　$\forall\, x\in X$, 截口 $M(x):=\{y\in Y:(x,y)\in M\}$ 是区间闭且 $Y\backslash M(x)$ 是 W-凸的,

则存在 $\bar{x}\in X$ 使得 $\{\bar{x}\}\times Y\subset M$.

注 定理 3.1 和推论 3.2 是新型的 KKM 定理;定理 3.3 是区间空间上的 Fan-型截口定理,它们可以与拓扑向量空间和 H-空间上的 KKM 定理及 Ky Fan 截口定理(见[4])相比较.

推论 3.4 设 X 是一强 Dadekind 完备的紧的 Hausdorff 区间空间,$M \subset X \times X$. 如果下列条件满足

(i) $\forall y \in X, \{x \in X:(x,y) \in M\}$ 是 W-凸闭的;

(ii) $\{y \in X:(x,y) \in M\}$ 是区间闭的,且 $\forall x \in X, \{y \in X:(x,y) \notin M\}$ 是 W-凸的.

则下列之一结论成立:

(1) $\exists \bar{x} \in X$,使得 $(\bar{x},\bar{x}) \notin M$.

(2) 存在 $\bar{x} \in X$,使得 $\{\bar{x}\} \times X \subset M$.

4 不动点定理

定理 4.1 设 X 是一紧的强 Dadekind 完备的 Hausdorff 区间空间,$F:X \to 2^X$ 是具开值的集值映象. 如果下列条件满足

(i) $\forall x \in X, F^C(x) := X \backslash F(x)$ 是 W-凸的;

(ii) $\forall x \in X, F^{-1}(x)$ 是非空 W-凸的且是区间开的,

则 F 在 X 上有不动点.

证明 令 $M = \{(x,y) \in X \times X : x \notin F(y)\}$. 则 $\forall y \in X, \{x \in X:(x,y) \in M\} = F^C(y)$. 由条件(i) 及 F 具开值知,推论 3.4 的条件(i) 满足. 又 $\forall x \in X$ 有

$$\{y \in X:(x,y) \in M\} = X \backslash F^{-1}(x), \quad \{y \in X:(x,y) \notin M\} = F^{-1}(x).$$

由条件(ii) 知推论 3.4 的条件(ii) 满足.

又 $\forall x \in X, F^{-1} \neq \varnothing$,故 $\exists y \in F^{-1}(x)$,即 $x \in F(y)$. 于是由 M 的定义知 $(x,y) \notin M$;从而由推论 3.4,$\exists \bar{x} \in X$ 使得 $(\bar{x},\bar{x}) \notin M$,即 $\bar{x} \in F(\bar{x})$. 证毕.

类似可证下面的定理成立

定理 4.2 设 X 与定理 4.1 中的相同,$F:X \to 2^X$ 是具非空 W-凸值的映象. 如果下列条件满足:

(i) $\forall y \in X, F^{-1}(y)$ 是开的,$X \backslash F^{-1}(y)$ 是 W-凸的;

(ii) $\forall x \in X, F(x)$ 是区间开的,

则 F 在 X 中有不动点.

5 匹配定理

定理 5.1 设 X 是一强 Dadekind 完备的紧的 Hausdorff 区间空间,Y 是任一区间空间,$G: X \to Z^Y$ 是具紧开值的集值映象. 再设下列条件满足

(i) $\forall y \in Y, G^{-1}(y)$ 是区间开的;

(ii) $\forall x \in X, G^C(x) := Y \backslash G(x)$ 是 W-凸的;

(iii) $G(x) = Y$,

则 $\forall s \in \mathscr{C}(X,Y)$ 下列二结论之一成立:

(1) $\exists \bar{x} \in X$,使得 $S(X) \subset G(\bar{x})$.

(2) $\exists x_1, x_2 \in X$ 和 $x_0 \in [x_1, x_2]$ 使得 $S^{-1}[G^C(x_0) \cap G(x_1) \cap G(x_2)] \neq \varnothing$.

证明 令 $F(x)=G^C(x)$，$x\in X$. 则 $F:X\to 2^Y$ 具紧闭值. $\forall S\in\mathscr{C}(X,Y)$，若结论(1)不成立，即 $\forall x\in X$ 有 $S(X)\not\subset G(x)$. 于是 $\forall x\in X$，$S^{-1}F(x)\neq\varnothing$. 由 X 紧知 $S^{-1}F:X\to 2^X$ 具非空闭值，可以证明结论(2)成立.

推论 5.2 设 X,Y 与定理 5.1 中的相同，$G:X\to 2^Y$ 是具紧开值的映象，$S\in\mathscr{C}(X,Y)$. 如果满足定理 5.1 中的条件(i)－(iii)及下面的条件(iv)：

(iv) $\forall x_1,x_2\in X$ 及 $\forall x\in[x_1,x_2]$，$S^{-1}[G^C(x)\cap G(x_1)\cap G(x_2)]=\varnothing$，

则 $\exists\,\bar{x}\in X$，使得 $S(\bar{x})\in G(\bar{x})$.

注 定理 5.1 是区间空间中最先建立的开覆盖匹配定理，它是 Fan[3]，Park[7]，Chang[1] 和 Ma 中的匹配定理的改进和发展.

参 考 文 献

[1] Chang Shihsen and Ma Yihai, *Generalized KKM theorem on H-space with applications*, J. Math. Anal. Appl., 163(1992), 406—421.

[2] 程曹宗、林有浩，不动点型极大极小定理的一点推广，数学学报，4(1991)，502—507.

[3] K. Fan, *Some properties of convex sets related to fixed point theorem*, Math. Ann., 266(1984), 519—537.

[4] K. Fan, *A generalization of Tychonoff's fixed point theorem*, Math. Ann., 142(1961), 303—310.

[5] V. Komornik, *Minimax theorems for upper semi-continuous functions*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 40(1982), 159—163.

[6] J. von Neumann, *Zur theoric der gesellshaftsphiele*, Math. Ann., 100(1928), 295—320.

[7] S. Park, *Generalizations of Ky Fan's matching theorems and their applications*, J. Math. Anal. Appl., 141(1989), 164—176.

[8] L. L. Stachó, *Minimax theorems beyond topological vector spaces*, Acta Sci. Math., 42(1980), 157—164.

A New Minimax Theorem with Applications

Zhang Shisheng

(Dept. of Math., Sichuan University, Chengdu 610064)

Wu Xian *Wang Dacheng*

(Yunan Normal University) (Chongqing Teachers'College)

Abstract

A new minimax theorem and its equivalent form are obtained. As applications, we obtain some section theorems of Ky Fan's type, matching theorems and fixed point theorems for set-valued mappings in interval spaces.

Keywords minimax theorem, interval space, strongly Dedekind complete interval space.