关于Davenport常数的一些估计*

高维东 林鸿飞
(大连理工大学数学科学研究所，116024) (大连理工大学计算机系，116024)

摘 要 本文就 G 为幂零群或 G 可写成两个子群之直和的情形，给 G 的 Davenport 常数 $D(G)$ 一些非平凡的估计.

关键词 幂零群，直和，Davenport 常数.
分类号 AMS(1991) 20D60/CCL O152.3

设 G 是一个有限群(运算用"+"来记，但不必可换). 定义 $D(G)$ 为满足下面条件的最小正整数 d：对任一由 G 的元构成的 d 项序列，都可找到其中的若干项(至少一项)按某一顺序相加和为 0.

$D(G)$ 通常被称做关于 G 的 Davenport 常数，它是 Davenport 在研究代数数域分解问题时提出的. 目前，只对少数 Abel 群 G，$D(G)$ 被精确地确定下来([1—3]，[8—9])，对一般的 Abel 群 G，有如下估计[3],[7]：

$$D(G)\leqslant e\left(1+\frac{\log|G|}{\log e}\right),$$

其中 e 是 G 的元之阶的最小公倍数.

对 G 非交换的情形，只有如下估计[10]

$$D(G)\leqslant\frac{|G|+1}{2}.$$

最近关于 Davenport 常数的研究可参见[4]和[6].

本文的目的是就 G 为幂零群或 G 可写成两个子群之直和之情形给 $D(G)$ 一些非平凡的估计.

对任一有限群 G，我们用 $e(G)$ 表 G 的元之阶的最小公倍数，并且定义 $S_e(G)$ 为满足下面条件的最小正整数 t：任一由 G 的元构成的 t 项序列都存在至多 e 项(至少一项)按某一顺序相加和为 0.

引理[5] 对任一有限群 G 都有 $S_e(G)\leqslant|G|$.

定理 1 设 G 为一有限群，$G=N\oplus H$，N_0, H_0 依次为 N, H 的正规子群，记 $e=e(N/N_0\oplus H/H_0)$，$S_e=S_e(N/N_0\oplus H/H_0)$，$D=D(N/N_0\oplus H/H_0)$，及 $d=D(N_0\oplus H_0)$. 则

$$D(G)\leqslant\min\left\{ed-e\left[\frac{S_e-e}{D}\right]+S_e-e,\ ed+(D-e)\left\lceil\frac{S_e-e}{D}\right\rceil\right\},$$

* 1994年9月22日收到.

这里$[x]$表不超过 x 的最大整数,$\lceil x\rceil$表不小于 x 的最小整数,x 为实数.

证明 考虑同态 $\varphi: G=N\oplus H\to N/N_0\oplus H/H_0$,对任一 $g=\eta+h(\eta\in N, h\in H)$,令

$$\varphi(g)=(\eta+N_0, h+H_0).$$

易知 $\ker\varphi=N_0+H_0$.

令

$$t=ed-e\left[\frac{S_e-e}{D}\right]+S_e-e=e\left(d-\left[\frac{S_e-e}{D}\right]\right)+S_e-e,$$

往证 $D(G)\leqslant t$. 为此考虑任一由 G 的元构成的 t 项序列 $T=(a_1,\cdots,a_t)$. 以下区分两种情形.

情形 1 $d>\left[\frac{S_e-e}{D}\right]$,由 $S_e=S_e(N/N_0\oplus H/H_0)$知,可以找到序列 $\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_t)$的 $l\left(=d-\left[\frac{S_e-e}{D}\right]\right)$个两两不交的非空子列,使得每一个子列的项数都小于或等于 e,且每一个子列的项都可以按适当顺序相加和为 0,于是相应地得到 T 的 l 个两两不交的非空子列 $T_1,\cdots,T_l$ 合于,对每一 i,$|T_i|\leqslant e$ 且 T_i 的项可按适当顺序相加和在 $\ker\varphi=N_0\oplus H_0$ 中. 但

$$|T|-|T_1|-\cdots-|T_l|\geqslant t-el=S_e-e,$$

故由 $D=D(N/N_0\oplus H/H_0)$知可以找到 T 的除开 $T_1,\cdots,T_l$ 的项而得到的子列的$\left[\frac{S_e-e}{D}\right](=d-l)$个两两不交的非空子列 $T_{l+1},\cdots,T_d$ 使得对每一 j,$l+1\leqslant j\leqslant d$,$T_j$ 的项可按适当顺序相加和在 $\ker\varphi=N_0\oplus H_0$ 中且$|T_j|\leqslant D$. 于是由 $d=D(N_0\oplus H_0)$知可从 $T_1,\cdots,T_d$ 中选出若干个(至少一个),将它们的项放在一起并按适当顺序相加和为 0.

情形 2 $d\leqslant\left[\frac{S_e-e}{D}\right]$,令$\left[\frac{S_e-e}{D}\right]=d+m$,则 $m\geqslant 0$,且

$$t=S_e-e+ed-e(d+m)\geqslant D(d+m)+ed-e(d+m)=Dd+(D-e)m\geqslant Dd,$$

于是仿情形 1 后半部可证有同样的结论. 总之,有

$$D(G)\leqslant t=ed-e\left[\frac{S_e-e}{D}\right]+S_e-e.$$

下面令 $u=ed+(D-e)\left\lceil\frac{S_e-e}{D}\right\rceil$,欲证明 $D(G)\leqslant u$. 同前类似,考虑任一由 G 的元构成的 u 项序列 U 并区分两种情形:

情形 I $d>\left\lceil\frac{S_e-e}{D}\right\rceil$,注意到 $D\left\lceil\frac{S_e-e}{D}\right\rceil\geqslant S_e-e$,仿情形 1 可证有 U 的若干项(至少一项)按某一顺序相加和为 0.

情形 II $d\leqslant\left\lceil\frac{S_e-e}{D}\right\rceil$,令$\left\lceil\frac{S_e-e}{D}\right\rceil=d+m$,则 $m\geqslant 0$,且

$$u=ed+(D-e)(d+m)=Dd+(D-e)m\geqslant Dd,$$

仿前可得同样结论. 总之,

$$D(G)\leqslant u=ed+(D-e)\left\lceil\frac{S_e-e}{D}\right\rceil.$$

至此,本定理得证.

推论 1 设 G 是一个非循环的有限 p-群(p 为素数),则 $D(G)\leqslant\frac{2p-1}{p^2}|G|$.

证明 当 $p=2$ 时,由前面提及的[10]之结论得本推论为真.

下设 $p\geqslant 3$,并设$|G|=p^m$,则 $m\geqslant 2$. 当 $m=2$ 时,必 $G=Z_p\oplus Z_p$,由[8]之结果知 $D(G)=2p$

$-1=\frac{2p-1}{p^2}|G|$.

设 $m=r-1(r\geqslant 3)$时本推论为真，当 $m=r$ 时，因 G 非循环，$p>2$ 及 $r\geqslant 3$，G 必有指数为 p 的非循环正规子群 N，从而

$$e(G/N)=S_e(G/N)=D(G/N)=p,$$

于是由定理 1，

$$D(G)\leqslant e(G/N)D(N)=pD(N)\leqslant p\ \frac{2p-1}{p^2}|N|=\frac{2p-1}{p^2}|G|.$$

定理 2 设 G 是一有限群，N 是 G 的正规子群，则 $D(G)\leqslant D(N)D(G/N)$.

证明极易，此略.

推论 2 设 G 是一有限幂零群，熟知 G 可写成 $G=H\oplus N$，其中 N 是循环群，H 的每个 Sylow 子群都是非循环的，且$(|H|,|N|)=1$. 设 $|H|=p_1^{a_1},\cdots,p_k^{a_k}$ 为 $|H|$之标准分解. 则

$$D(G)<(\prod_{i=1}^{k}(\frac{2p_i-1}{p_i^2}))|G|;$$

又当 $p_1=2$ 时，

$$D(G)\leqslant(\frac{1}{2}\prod_{i=2}^{k}(\frac{2p_i-1}{p_i^2}))|G|.$$

证明 写 H 为其 Sylow 子群之直和 $H=\bigoplus_{i=1}^{k}H_i$，其中 H_i 为 H 的 Sylow p_i-子群. 由定理 2

$$D(G)\leqslant D(H_1)D(H_2)\cdots D(H_k)D(N)=D(H_1)D(H_2)\cdots D(H_k)|N|.$$

再应用推论 1 及[10]之结果得本推论为真.

定理 3 设 H 是一有限群，$e=e(H)$，$G=H\oplus Z_{em}$，则 $D(G)\leqslant em+e|H|-e$.

证明 取 $H_0=H$，N_0 为 Z_{em}的一子群同构于 Z_e，置 $N=Z_{em}$，应用定理 1 有

$$D(G)\leqslant em-e[\frac{S_e-e}{D}]+S_e-e\leqslant em+S_e-e$$

再由引理得 $D(G)\leqslant em+e|H|-e$. 证毕.

由于显然有 $D(G)\geqslant em$，因此当 e,H 取定，m 足够大时，由定理 3 给出的 $D(G)$的估计已相当好了.

参 考 文 献

[1] P. C. Baayen, $(C_2\oplus C_2\oplus C_2\oplus C_{2n})$! *is true for odd n*, ZW-1969-006, Math. Centre Amsterdam.

[2] P. Van Emde Boas, *A Combinatorial problem on finite abelian groups*, Ⅱ, ZW-1969-007, Math. Centre, Amsterdam.

[3] P. Van Emde Boas and D. Kruyswijk, *A combinatorial problem on finite abelian groups*, Ⅲ, ZW-1969-008, Math. Centre, Amsterdam.

[4] A. Geroldinger and R. Schneider, *On Davenport's constant*, J. Combin. Theory, 61A(1992), 147—152.

[5] Y. O. Hamidoune, *On a subgroup contained in some words with a bounded length*, Discrete Math., 103(1992), 171—176.

[6] M. Mazur, *A note on the growth of Davenport's constant*, Manuscript Math., 74(1992), 229—235.

[7] R. Meshlam, *An uncertainly inequlity and zerosums*, Discrete Math., 84(1990), 197—200.

[8] J. E. Olson, *A combinatorial problem on finite abelian groups*, I, J. Number Theory, 1(1969), 8—10.

[9] J. E. Olson, *A combinatorial problem on finite abelian groups* II, J. Number Theory, 1(1969), 195—199.

[10] J. E. Olson and E. T. White, *Sums from a sequences of group elements*, Number Theory and Algebra, Academic Press, New York, 1977, 215—222.

Remarks on Devenport's Constant

Gao Weidong

(Inst. of Math Sci., Dalian University of Technology, Dalian 116024)

Lin Hongfei

(Dept. of Comp Sci., Dalian University of Technology, Dalian 116024)

Abstract

Let G be a finite group (written additively). The Davenport's constant $D(G)$ is the minimal integer d such that, every sequence of d elements in G contains a nonempty subsequence such that the sum of whose elements in a suitable order is zero.

In this paper, some estimations are proved on $D(G)$. It is shown among other results that if $G = H \oplus Z_{em}$ and $e = e(H)$ then $D(G) \leqslant em + e|H| - e$, where H is a finite group, and $e(H)$ is the least common mutiplier of orders of elements in H.

Keywords Davenport's constant.