第16卷第2期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 2
1996年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1996

“Γ-环中存在强诣零根”的命题是错误的*

奚李峰 奚欧根
(浙江大学应用数学系，杭州 310027) (宁波大学数学系，315211)

摘 要 本文针对 Coppage 与 Luh 的论文[1]中定理 5.4，用一个实例有力地指出该定理是错误的，这个实例指出，尽管任何一个结合环都有一个诣零根，但推广到 Γ-环中，并不是任何一个 Γ-环都有强诣零根. 因而 Γ-环决不是结合环的平行推广.

关键词 Γ-环，强诣零元，强诣零根.
分类号 AMS(1991) 16N40, 16N80/CCL O153.3

1 引言及准备

设 M 是一个 Γ-环，$a\in M$，如果存在正整数 n，使得 $(a\Gamma)^n a=\{0\}$，就称 a 为 M 的一个强幂零元.

设 I 是 M 的一个理想，如果 I 的每个元都是强幂零元，称 I 为 M 的强诣零理想.

如果 M 的所有强诣零理想的和仍是 M 的强诣零理想，则称这个和为 M 的强诣零根.

强诣零根是结合环的诣零根在 Γ-环中的推广. 任意一个结合环都有诣零根，这是众所周知的，然而，任意给定一个 Γ-环，未必都有强诣零根.

早在 1971 年，Coppage 与 Luh 的文章[1]的定理 5.4 说，若 A 与 B 是 Γ-环 M 的强诣零理想，则它们的和是 M 的强诣零理想. 按照这个定理就可推得，M 的所有强诣零理想之和是 M 的强诣零理想，那么，Γ-环 M 就有强诣零根了. 但是，Coppage 与 Luh 并没有对定理 5.4 给出证明. 本文通过反例，指出 Coppage 与 Luh 的定理 5.4 的结论是错误的. 这个反例指出，任意一个 Γ-环中存在强诣零根的命题是错误的，换言之，并不是任何 Γ-环都有强诣零根. 因而 Γ-环决不是结合环的平行推广.

2 实 例

设 $M_0=\{x_1,x_2\}$，$\Gamma_1=\{a_s|s=1,2,3,\cdots\}$，由 M_0 与 Γ_1 的元素作出的形式单项式的集合：

$$M_1=\{x_{i_1}a_{j_1}x_{i_2}a_{j_2}\cdots x_{i_k}a_{j_k}x_{i_{k+1}}\,|\,i_t\in\{1,2\},j_s\in[1,\infty)\cap Z,k\geq 1\}\cup M_0,$$

$(M,+)$ 是 M_1 生成的自由 Z-模. 乘法算子加群 Γ 由 Γ_1 自由生成. 在 $(M,+)$ 上引入 Γ-乘法：$M\times\Gamma\times M\to M$，于是，$M$ 就具有 Γ-环的代数结构.

* 1993年2月21日收到.

给定 $0 \neq a \in M$，由 $(M, +)$ 的结构，$a = \sum_{i=1}^{N(a)} n_i K_i$，这里的 K_i 是互不相同的单项式，$N(a)$ 表示依赖于 a 的某正整数，$n_i \in \mathbf{Z}$，$\prod_{i=1}^{N(a)} n_i \neq 0$ 称 a 的这种表达式为标准展开式. 定义 a 的长度 $|a| = \sum_{i=1}^{N(a)} [|n_i| + d(K_i)]$，这里 $d(K_i)$ 表示 K_i 作为单项式字节的长度，如 $d(x_1) = 1$，$d(x_1 \alpha_1 x_1) = 3$ 等. 零的长度定义为 0.

记 $(x_i)_\Gamma$ 为 x_i 在 Γ- 环 M 中生成的 Γ- 理想，$(i = 1, 2)$. 令集合 $H_i = \{(x\Gamma)^{|x|}x \mid x \in (x_i)_\Gamma\}$，并记 I_i 为 H_i 生成的理想，$I_1 + I_2 = I$.

考虑同态 $\eta: M \to M/I$，它将 M 的 Γ- 理想 $(x_i)_\Gamma$ 映为 $\eta(x_i)_\Gamma$，显然，同态象 $\eta(x_i)_\Gamma$ 是 M/I 的强诣零理想. 事实上，$\forall\, x \in (x_i)_\Gamma$，因为，$(x\Gamma)^{|x|}x \subseteq H_i \subseteq I_i \subseteq I$，故 $(\eta(x)\Gamma)^{|x|}\eta(x) = \eta[(x\Gamma)^{|x|}x] \subseteq \bar{I} = \bar{0} \in \bar{M} = M/I$，因此 $\eta(x)$ 是 M/I 的强幂零元. 又因 η 是满射，故 $\eta(x_i)_\Gamma$ 是 M/I 的理想，同时 $\eta(x_i)_\Gamma$ 的每个元在 $(x_i)_\Gamma$ 中都有原象，故 $\eta(x_i)_\Gamma$ 为 M/I 的强诣零理想. 既然 $\eta(x_1)_\Gamma$ 与 $\eta(x_2)_\Gamma$ 都是 M/I 的强诣零理想，是否 $\eta(x_1)_\Gamma$ 与 $\eta(x_2)_\Gamma$ 的和仍是 M/I 的强诣零理想？答案是否定的. 因为可以证明，虽然 $\eta(x_1)$ 与 $\eta(x_2)$ 分别是理想 $\eta(x_1)_\Gamma$ 与 $\eta(x_2)_\Gamma$ 中的强幂零元，但 $\eta(x_1) + \eta(x_2) = \eta(x_1 + x_2)$ 不是 $\eta(x_1)_\Gamma + \eta(x_2)_\Gamma$ 中的强幂零元，因而 M/I 的两个强诣零理想 $\eta(x_1)_\Gamma$ 与 $\eta(x_2)_\Gamma$ 之和不再是 M/I 的强诣零理想，于是 M/I 的所有强诣零理想之和当然就不是强诣零理想 3，因而对于这样一个 Γ- 环 M/I 来说，就没有强诣零根.

下面将证明这个结论.

先做一些准备工作. 设 $a \in I_i$，计算 $(a\Gamma_1)^{|a|}a$，设 $a = \sum_{i=1}^{N(a)} n_i K_i$，这里 $\prod_{i=1}^{N(a)} n_i \neq 0$，$\{K_i \mid i = 1, 2, \cdots, N(a)\}$ 为互不相同的单项式集合. $(a\Gamma_1)^{|a|}a$ 中的元素形为

$$\Big(\sum_{i=1}^{N(a)} n_i K_i\Big)\gamma_1\Big(\sum_{i=1}^{N(a)} n_i K_i\Big)\gamma_2 \cdots \gamma_{|a|}\Big(\sum_{i=1}^{N(a)} n_i K_i\Big)$$
$$= \sum_{1 \leqslant j_1, j_2, \cdots, j_{|a|+1} \leqslant N(a)} n_{j_1} n_{j_2} \cdots n_{j_{|a|+1}} K_{j_1}\gamma_1 K_{j_2}\gamma_2 K_{j_3}\gamma_3 \cdots \gamma_{|a|} K_{j_{|a|+1}}, \quad (\gamma_i \in \Gamma_1, \forall\, i).$$

由于 $|a| + 1 > N(a)$（因为 $|a| \geqslant \sum_{i=1}^{N(a)} |n_i| \geqslant \sum_{i=1}^{N(a)} 1 = N(a)$），故上述展开式的每一被加项中的单项式 $K_{j_1}, K_{j_2}, \cdots, K_{j_{|a|+1}}$ 必有重复者，此性质叫做重复性质.

由于“$\eta(x)$ 是强幂零元”等价于“存在 $n \in \mathbf{Z}^+$，使得 $(x\Gamma)^n x \subseteq I$”. 因此，若 $\eta(x_1 + x_2)$ 是强幂零元，则必存在某正整数 $N \in \mathbf{Z}^+$，使得 $[(x_1 + x_2)\Gamma]^N(x_1 + x_2) \subset I = I_1 + I_2$，于是便有 $\{\prod_{j=1}^{N} [(x_1 + x_2)\gamma_j]\}(x_1 + x_2) \in I = I_1 + I_2 (\gamma_j \in \Gamma)$. 此处不妨设 N 为奇数（若 N 为偶数，可再作一次算子乘法，则 $N + 1$ 为奇数）.

为了下文叙述方便，现引进“出现”概念.

设 $x = \sum_{j=1}^{N(x)} m_j K_j$ 为标准展开式. 称单项式 K 出现在 x 中，是指，如果 $K \in \{K_1, K_2, \cdots, K_{N(x)}\}$；称 K 出现在理想 J 中，如果 K 出现在 J 的某个元素中. 由 $(M, +)$ 的自由模结构，可得如下结论：J_1, J_2 为 Γ- 理想，单项式 K 出现在 $J_1 + J_2$ 中，则 K 出现在 J_1 中或 K 出现在 J_2 中，

两者必居其一. 此外，以一个单项式 K 生成的 Γ-理想 $(K)_\Gamma$ 必然有：$(K)_\Gamma$ 的每个元素中的每个单项式必有一段文字与 K 相重合.

今观察 $\{\prod_{j=1}^{N}(x_1+x_2)a_j\}(x_1+x_2)$ 的展开式，其中必有一项为 $K_0=x_1a_1x_2a_2x_1a_3x_2a_4\cdots x_1a_Nx_2$(注意：因上面设 N 为奇数，故 K_0 的最后一个字母为 x_2)，K_0 显然出现在 $I=I_1+I_2$ 中，因此 K_0 或出现于 I_1 中或出现于 I_2 中. 不妨设 K_0 出现于 I_1 中，由于 I_1 由 H_1 生成，而 H_1 由 $\{(x\Gamma_1)^{|x|}x\}_{x\in(x_1)_\Gamma}$ 加法生成. 于是理想 I_1 就等于所有理想 $\{([\prod_{i=1}^{|x|}(x\gamma_i)]x)_\Gamma \mid \gamma_i\in\Gamma_1, x\in(x_1)_\Gamma\}$ 的和. 故可设 K_0 出现于 $\sum_{i=1}^{k}(a_i)_\Gamma$ 中，$a_i\in\{(x\Gamma_i)^{|x|}x\}_{x\in(x_1)_\Gamma}$，类似地，不妨设 K_0 在 $(a_1)_\Gamma$ 中出现.

设 $a_1=a\gamma_1a\gamma_2\cdots\gamma_{|a|}a$，$a=\sum_{i=1}^{N(a)}n_iK_i\in I_1$，易知每个 K_i 中含文字 x_1，代 a 于 a_1 中，

$$\begin{aligned}a_1=a\gamma_1a\gamma_2\cdots\gamma_{|a|}a&=(\sum_{i=1}^{N(a)}(n_iK_i))\gamma_1\cdots\gamma_{|a|}(\sum_{i=1}^{N(a)}n_iK_i)\\&=\sum_{1\leqslant j_1,\cdots,j_{|a|+1}\leqslant N(a)}n_{j_1}\cdots n_{j_{|a|+1}}(K_{j_1}\gamma_1K_{j_2}\cdots\gamma_{|a|}K_{j_{|a|+1}}),\ (\gamma_i\in\Gamma_1)\end{aligned}$$

于是，$a_1\in\sum_{1\leqslant j_1,\cdots,j_{|a|+1}\leqslant N(a)}(K_{j_1}\gamma_1\cdots\gamma_{|a|}K_{j_{|a|+1}})_\Gamma$，故

$$(a_1)_\Gamma\subseteq\sum_{1\leqslant j_1,\cdots,j_{|a|+1}\leqslant N(a)}(K_{j_1}\gamma_1\cdots\gamma_{|a|}K_{j_{|a|+1}})_\Gamma.$$

故当 K_0 出现于 $(a_1)_\Gamma$ 时，K_0 亦出现于

$$\sum_{1\leqslant j_1,\cdots,j_{|a|+1}\leqslant N(a)}(K_{j_1}\gamma_1\cdots\gamma_{|a|}K_{j_{|a|+1}})_\Gamma$$

中. 以 K_0 必出现于某个理想 $(K_{j_1}\gamma_1\cdots\gamma_{|a|}K_{j_{|a|+1}})_\Gamma$ 中，根据“出现于 $(K)_\Gamma$ 中的每个单项式都有一段文字重合于 K”的事实，可知 K_0 中必有一段文字为 $K^{(1)}=K_{j_1}\gamma_1\cdots\gamma_{|a|}K_{j_{|a|+1}}$，再由重复性质知，在 $K^{(1)}$ 中的 $K_{j_1},K_{j_2},\cdots,K_{j_{|a|+1}}$ 中必有重复者. 今若有一个字节长 $\geqslant 3$ 的单项式在其中被重复，由于该单项式中必含 Γ_1 中的算子文字，而 $\Gamma_1=\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$，又 K_0 中算子文字 α_i 的下标为单调地从左往右严格增加，故字节长 $\geqslant 3$ 的单项式不可能被重复. 所以重复的单项式的字节长只能等于 1. 由于前面已知，每个 K_{j_i} 中都含有 x_1，故可断言这些重复单项式只能是 x_1，其余的单项式 K_{j_i} 都是互不相同的. 故若把 $K^{(1)}$ 中的重复单项式 x_1 予以标出，

$$K^{(1)}=\boxed{s_1}\ \alpha_{t_1}x_1\alpha_{t_1+1}\ \boxed{s_2}\ \alpha_{t_2}x_1\alpha_{t_2+1}\ \boxed{s_3}\cdots\boxed{s_k}\ \alpha_{t_k}x_1\alpha_{t_k+1}\ \boxed{s_{k+1}},$$

$s_i=K_{i_1}\alpha_{i_1}K_{i_2}\alpha_{i_2}\cdots K_{is(i)}$(只有 s_1,s_{k+1} 可能为空字. 如果 s_1 为空字，去掉 α_{t_1}；如果 s_{k+1} 为空字，去掉 α_{t_k+1})，而 $\{K_{ij}\}_{j\leqslant s(i)}^{i\leqslant k+1}$ 为互不相同的单项式组，故

$$a=n_0x_1+\sum_{i,j}n_{ij}K_{ij}+b\ (b\text{ 指不出现 }x_1\text{ 与 }\{K_{ij}\}_{j\leqslant s(i)}^{i\leqslant k+1}\text{ 者}).$$

当然，s_1 为空字时，K_{1j} 为空字，此时形式地写在 a 的表达式中，对 s_{k+1} 亦然. 由上式可得

$$|a|\geqslant|n_0|+1+\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{s(i)}(|n_{ij}|+d(K_{ij}))\tag{1}$$

此外，从 $K^{(1)}$ 的两个表达式中(注意，实际是两个完全一样的式子)，若划去所有单项式 K_{ij} 与 x_1

后，由前一表达式可见，应剩下$|a|$个Γ_1算子文字$\gamma_1\cdots\gamma_{|a|}$. 再由$K^{(1)}$的后一表达式可见，划去$K_{ij}$与$x_1$以后，在$s_1\alpha_{t_1}$中恰有$s(1)$个$\Gamma_1$算子文字，在$\alpha_{t_1+1}s_2\alpha_{t_2}$中恰有$s(2)+1$个$\Gamma_1$算子文字，…，在$\alpha_{t_{k-1}+1}s_k\alpha_{t_k}$中恰有$s(k)+1$个$\Gamma_1$算子文字，在$\alpha_{t_1+1}s_{k+1}$中恰有$s(k+1)$个$\Gamma_1$算子文字，于是下列等式成立（当$s_1$或$s_{k+1}$为空字时，仍然成立）：

$$|a| = s(1) + \sum_{i=2}^{k}[s(i)+1] + s(k+1),$$

(1)，(2)两式结合，就有

$$s(1) + \sum_{i=2}^{k}[s(i)+1] + s(k+1) \geqslant |n_0| + 1 + \sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{s(i)}[|n_{ij}| + d(K_{ij})]. \tag{3}$$

于是，当$2\leqslant i\leqslant k$时，s_i不是空字，

$$\sum_{j=1}^{s(i)}[|n_{ij}| + d(K_{ij})] \geqslant \sum_{j=1}^{s(i)}(1+3) \geqslant 4s(i) \geqslant s(i)+3,\ (\text{因 } |n_{ij}|\geqslant 1, d(K_{ij})\geqslant 3).$$

当$i=1$或$i=k+1$时，

$$\sum_{j=1}^{s(i)}[|n_{ij}| + d(K_{ij})] \geqslant 4s(i),$$

（s_1或s_{k+1}可能为空字，此时$s(i)=0$）. 于是，因$|n_0|\geqslant 1$，$4s(1)\geqslant s(1)$，$4s(k+1)\geqslant s(k+1)$，$s(i)+3>s(i)+1$，便得：(3)式左边$\geqslant$(3)式右边$\geqslant 2+4s(1)+4s(k+1)+\sum_{i=2}^{k}[s(i)+3]\geqslant 2+$(3)式左边. 于是得$2\leqslant 0$，矛盾.

因此证明了$\eta(x_1)+\eta(x_2)=\eta(x_1+x_2)$不是$M/I$的强幂零元，于是$M/I$的两个强诣零理想$\eta(x_1)_\Gamma$与$\eta(x_2)_\Gamma$的和不是$M/I$的强诣零理想.

参 考 文 献

[1] William E. Coppage and Jiang Luh, *Radicals of gamma rings*, J. Math. Soc. Japan., Vol. 23, No. 1, 1971, 40—52.

[2] Xi Ougen, *Quasi-P Radicals of Associative Rings*, Acta Math. Hung., 60(1—2)(1992), 115—118.

It Is Wrong that "There Exists a Strongly Nil-Radical in Γ-Ring"

Xi Lifeng *Xi Ougen*

(Zhejiang University, Hangzhou 310027) (Dept. Math., Ningbo University, 315211)

Abstract

In this paper, we give a concrete example to show that Theorem 5.4 of paper[1] by Coppage and Luh is wrong. This example shows that Γ-ring theory is not the parallel generalization of associative ring.

Keywords Γ-ring, strong nilpotent element, strong nil-radical.