第16卷第3期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 3
1996年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1996

弱遗传根与弱遗传模类*

戴 跃 进
（福建师范大学数学系，福州350007）

关键词 遗传根，弱遗传根，弱遗传模类.
分类号 AMS(1991) 13H99/CCL O153.3

定义1 根性质φ称为弱遗传的，如果对任意环A的每一个理想I，均存在自然数$n=n(I)$，使得$(I\cap\varphi(A))^n\subseteq\varphi(I)$.

定理1 设φ是一个根性质，那么，φ是弱遗传根的充分必要条件为对于φ根环A的每一个理想I，$I/\varphi(I)$是幂零环.

证明 必要性 设φ是弱遗传珍，A是一个φ根环，$I\lhd A$. 那么，存在自然数$n=n(I)$，使得$(I\cap\varphi(A))^n\subseteq\varphi(I)$. 故$I^n\subseteq\varphi(I)$. 因此，$I/\varphi(I)$是一个幂零环.

充分性 设I是环A的一个理想，那么，$I\cap\varphi(A)$是φ根环$\varphi(A)$的一个理想. 依题设，$(I\cap\varphi(A))/\varphi(I\cap\varphi(A))$是一个幂零环，故存在自然数$n=n(I)$使得

$$(I\cap\varphi(A))^n\subseteq\varphi(I\cap\varphi(A))\subseteq\varphi(I).$$

因此，φ是一个弱遗传根.

定义2 设A是一个环，$\mathbf{M}_A$是A-模的一个类. 令

$$\ker\mathbf{M}_A=\begin{cases}A, & 若\ \mathbf{M}_A=\varnothing;\\ \bigcap\{(0:M)_A;M\in\mathbf{M}_A\}, & 若\ \mathbf{M}_A\neq\varnothing.\end{cases}$$

模类$\mathbf{M}=\bigcup\limits_A\mathbf{M}$（$A$遍历所有的结合环）称为弱遗传的，如果下列条件被满足：

(1) 若$M\in\mathbf{M}_{A/B}$，则$M\in\mathbf{M}_A$；反之，若B是环A的一个理想，$M\in\mathbf{M}_A$，且$B\subseteq(0:M)_A$，则$M\in\mathbf{M}_{A/B}$.

(2) $\ker\mathbf{M}_A=(0)$当且仅当对环A的每一个理想B，均有$\mathbf{M}_B\neq\varnothing$.

(3) 若$\mathbf{M}_A=\varnothing$，则对于环A的每个理想B，$B/\ker\mathbf{M}_B$是幂零环.

利用一般模类的性质，可以证明

定理2 设$\mathbf{M}=\bigcup\limits_A\mathbf{M}_A$是一个弱遗传模类. 称$A$是一个$\mathbf{M}$-根环，如果$\mathbf{M}_A=\varnothing$. 那么，$\mathbf{M}$-根是Amitsur-Kurosh意义下的一个弱遗传根.

定理3 设φ是一个弱遗传根. 那么，存在一个弱遗传模类$\mathbf{M}$，使对于任意的环A，均有

$$\varphi(A)=\mathbf{M}(A).$$

* 1994年1月5日收到. 96年4月5日收到修改稿. 福建省自然科学基金资助项目.