第16卷第3期 数学研究与评论 Vol.16 No.3
1996年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1996

逆极限空间上的ϵ-紊动*

李 明 军
(广西工学院基础部, 柳州 545005)

摘 要 设f是紧致度量空间上的满映射, σ_f为f的逆极限空间上的移位映射. 本文证明, 存在$\epsilon, \epsilon' > 0$, f是ϵ-紊动的当且仅当σ_f是ϵ'-紊动的. 此外, 本文还讨论了f是非满映射和线段自映射的情形.

关键词 逆极限空间, 移位映射, ϵ-紊动
分类号 AMS(1991) 54H20, 34C35/CCL O189.1

§1 引 言

设(X, d)为紧致度量空间, $f\in C^0(X)$, f的逆向极限空间(inverse limit space)定义为:

$$\varprojlim\langle X, f\rangle = \{x\in X \xleftarrow{f} X \xleftarrow{f} \cdots, x=(x_i)_{i=0}^{\infty}, f(x_{i+1})=x_i, \text{其中 } x_i\in X, i\geq 0\}.$$

在$\varprojlim\langle X, f\rangle$上引进如下度量:

$$\tilde{d}(x, y)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d(x_i, y_i)}{2^i}, \text{对任 } x, y\in\varprojlim\langle X, f\rangle.$$

移位映射σ_f: $\varprojlim\langle X, f\rangle\to\varprojlim\langle X, f\rangle$定义为$\sigma_f((x_0, x_1, \cdots))=(f(x_0), x_0, x_1, \cdots)$, 第$i$次投影定义为$\pi_i(x)=x_i$, 对任$x=(x_i)_{i=0}^{\infty}\in\varprojlim\langle X, f\rangle$.

设$f\in C^0(X)$. 若存在$\epsilon>0$及集合$S\subset X$满足: 对任$x, y\in S$, $x\neq y$, 任$p\in P(f)$, 有

(1) $\lim_{n\to\infty}\sup d(f^n(x), f^{(n)}(y))>\epsilon$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\inf d(f^n(x), f^{(n)}(y))=0$;

(3) $\lim_{n\to\infty}\sup d(f^n(x)\cdot f^{(n)}(p))>\epsilon$,

则称S为f的ϵ-紊动集. 若ϵ-紊动集S是不可数集, 则称f为ϵ-紊动的.

本文将证明

定理1 设$f\in C^0(X)$为满映射, 存在$\epsilon>0$, f为ϵ-紊动的当且仅当存在$\epsilon'>0$, σ_f为ϵ'-紊动的.

对于线段连续自映射, 有:

定理2 设$f\in C^0(I)$, 那么, 存在$\epsilon>0$, f为ϵ-紊动的当且仅当存在$\epsilon'>0$, σ_f为ϵ'-紊动的.

* 1993年6月21日收到

本文将在第 4 节给出一个紧致度量空间上的非满映射 f，f 为 ϵ-紊动的，但不存在 $\epsilon' > 0$，使得 σ_f 为 ϵ'-紊动的.

§2　σ_f 是 ϵ-紊动的一个充要条件

设 X 为紧致度量空间，$f\in C^0(X)$，$\varprojlim\langle X, f\rangle$ 为 f 的逆向极限空间，π_0 为 $\varprojlim\langle X, f\rangle$ 到 X 的第 0 次投影.

引理 1　设 $x_0\in X$，那么，$\pi_0^{-1}(x_0)\neq\varnothing$ 当且仅当 $x_0\in X_0=\bigcap_{n=0}^{\infty}f^n(X)$.

证明　设 $\pi_0^{-1}(x_0)\neq\varnothing$，则有 $x=(x_i)_{i=0}^{\infty}\in\pi_0^{-1}(x_0)$. 于是，对任意 $n\geq 0$，有 $x_0=f^n(x_n)$，从而 $x_0\in f^n(X)$，故 $x_0\in X_0$.

反之，假设 $x_0\in X_0$. 首先，注意到 $f^n(X_0)=X_0$，故存在 $x_1\in X_0$，使 $f(x_1)=x_0$；对 x_1，同样可得 $x_2\in X_0$，使 $f(x_2)=x_1$. 归纳地，得到一点 $(x_i)_{i=0}^{\infty}\in\varprojlim\langle X, f\rangle$，故 $\pi_0^{-1}(x_0)\neq\varnothing$.

定理 1 的证明　首先，设 σ_f 是 ϵ-紊动的，T 是 σ_f 的不可数 ϵ-紊动集.

对 T 中任意两点 x, y，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\tilde d(\sigma_f^n(x),\sigma_f^n(y))>\epsilon$，故 $\pi_0(x)\neq\pi_0(y)$. 令 $S=\{x_0$: 对任 $x\in T$，取 $x_0=\pi_0(x)\}$，则 S 为不可数集. 下证 S 是 f 的 $\frac{\epsilon}{4}$-紊动集.

任取 $x_0, y_0\in S$，有 $\tilde d(\sigma_f^n(x),\sigma_f^n(y))\geq d(f^n(x_0), f^n(y_0))$，又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf\tilde d(\sigma_f^n(x),\sigma_f^n(y))=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf d(f^n(x_0), f^n(y_0))=0$.

假设 $x_0\neq y_0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup d(f^n(x_0), f^n(y_0))<\frac{\epsilon}{4}$，那么，必存在 $N>0$，当 $n\geq N$ 时，有

$$d(f^n(x_0), f^n(y_0))<\frac{\epsilon}{4}.$$

X 为紧致度量空间，故存在 $M>0$，对任 $z, w\in\varprojlim\langle X, f\rangle$，有 $\sum\limits_{i=M}^{\infty}\frac{d(z_i, w_i)}{2^i}<\frac{\epsilon}{4}$. 于是，对任 $n\geq N+M$，有

$$\begin{aligned}\tilde d(\sigma_f^n(x),\sigma_f^n(y))&=\sum_{i=0}^{M-1}d(f^{n-i}(x_0), f^{n-i}(y_0))/2^i+\frac{1}{2^M}\tilde d(\sigma_f^{n-M}(x),\sigma_f^{n-M}(y))\\&<\frac{\epsilon}{4}\times 2+\frac{\epsilon}{4}=\frac{3\epsilon}{4}.\end{aligned}$$

因而，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\tilde d(\sigma_f^n(x),\sigma_f^n(y))\leq\frac{3\epsilon}{4}$，此与 σ_f 为 ϵ-紊动矛盾. 故当 $x_0\neq y_0$ 时，必有

$$\lim_{n\to\infty}\sup d(f^n(x_0), f^n(y_0))\geq\frac{\epsilon}{4}.$$

类似可得，对任 $x_0\in S$，$p_0\in p(f)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup d(f^n(x_0), f^n(p_0))\geq\frac{\epsilon}{4}$. 故此可知，$S$ 是 f 的不可数 $\frac{\epsilon}{4}$-紊动集，f 是 $\frac{\epsilon}{4}$-紊动的.

反过来，假设 f 是 ϵ-紊动的，S 是 f 的不可数 ϵ-紊动集. f 为满映射，根据引理 3，可令 $T=\{x$，对任 $x_0\in S$，选定一个 $x\in\pi_0^{-1}(x_0)\}$. 显然，由 S 为不可数集知 T 也是不可数集. 下证 T 为 σ_f 的 ϵ-紊动集.

对任 $x, y \in T, x \neq y$, 必有$\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x_0), f^n(y_0)) > \epsilon$, 又因为 $\widetilde{d}(\sigma_f^n(x), \sigma_f^n(y)) \geq d(f^n(x_0), f^n(y_0))$, 故$\limsup_{n\to\infty} \widetilde{d}(\sigma_f^n(x), \sigma_f^n(y)) > \epsilon$ 类似地, 对任 $x \in T, p \in p(\sigma_f)$, 有

$$\limsup_{n\to\infty} \widetilde{d}(\sigma_f^n(x), \sigma_f^n(p)) > \epsilon$$

X 为紧致度量空间, 故对任 $\delta > 0$, 存在$N > 0$, 对任 $z, w \in \varprojlim\langle X, f\rangle$, 有$\sum_{i=N}^{\infty} \frac{d(z_i, w_i)}{2^i} < \frac{\delta}{4}$. 对$N > 0$, 存在 $0 < \rho < \frac{\delta}{4}$, 对任 $s, t \in X$, 当 $d(s, t) < \rho$时, 有

$$\max\{d(f^i(s), f^i(t)), 1 \leq i \leq N\} < \frac{\delta}{2}.$$

由$\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x_0), f^n(y_0)) = 0$ 知, 存在$M > 0$, 使得 $d(f^M(x_0), f^M(y_0)) < \rho$. 从而

$$\widetilde{d}(\sigma_f^{N+M}(x), \sigma_f^{N+M}(y)) = \sum_{i=0}^{N-1} d(f^{N+M-i}(x_0), f^{N+M-i}(y_0))/2^i + \frac{1}{2^N}\widetilde{d}(\sigma_f^{M+1}(x), \sigma_f^{M+1}(y))$$

$$= \frac{\delta}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{2^i} + \frac{\delta}{4} < \delta,$$

由 δ的任意性, 有 $\liminf_{n\to\infty} \widetilde{d}(\sigma_f^n(x), \sigma_f^n(y)) = 0$. 故 T 是 σ_f 的 ϵ- 紊动集, σ_f 是 ϵ- 紊动的.

§3　线段连续自映射的情形

设 $I = [0, 1], f \in C^0(I), I_0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(I)$.

引理 2　I_0 为 f 的紧致连通不变集, 对 I_0 的任一邻域 U, 均存在 $m \geq 0$, 当 $n \geq m$ 时, 有 $f^n(I) \subset U$, f 的 w - 极限集 $w(f) \subset I_0$.

称满足 ϵ- 紊动定义中条件(1)—(3) 的两点 x 及 y 为 ϵ- 紊动点偶. 据文献[3], 有

引理 3　设 $f \in C^0(I)$, 则 f 为 ϵ- 紊动的当且仅当 f 有 ϵ- 紊动点偶.

命题 1　设 $f \in C^0(I)$, 则 f 为 ϵ- 紊动的当且仅当 $f|_{I_0}$ 为 ϵ- 紊动的.

证明　充分性显然. 下证必要性.

设 f 是 ϵ- 紊动的, T 是 f 的不可数 ϵ- 紊动集, 那么, 对任 $x, y \in T$, 有

(a)　$\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > \epsilon$;

(b)　$\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$.

先假设对 T 中任一点, 它的轨道都不与 I_0 相交.

由(a) 知, 存在$(n_i)_{i=0}^{\infty}$ 及 $x_0, y_0 \in I, x_0 \neq y_0$, 使得 $f^{n_i}(x) \to x_0, f^{n_i}(y) \to y_0 (n_i \to \infty)$. 由 $w(f) \subset I_0$ 知 $x_0, y_0 \in I_0$. x 及 y 的轨道均与 I_0 不相交, 故可设 $x_0 = a, y_0 = b$.

对 $b - a = \delta > 0$, 必存在 $\epsilon > 0$, 当 $|x - y| < \epsilon$时, 有

$$|f(x) - f(y)| < \delta \qquad (*)$$

取 I_0 的邻域(c, d), 满足$\max\{a - c, d - b\} < \epsilon$. 据引理 4 知, 存在$M > 0$, 当 $n \geq M$ 时, 有 $f^n(x), f^n(y) \in (c, a)$. 若存在$M \leq s$, 使得 $f^s(x), f^{s+1}(x) \in (c, a)$, 则 $|f^s(x) - f^{s+1}(x)| < \epsilon$. 再由(*) 知 $|f^{s+1}(x) - f^{s+2}(x)| < \delta$, 故 $f^{s+2}(x) \in (c, a)$. 所以, 对 $n \geq s$, 有 $f^n(x) \in (c, a)$. 由 $f^{n_i}(x) \to a$ 知

(i) 存在 $k \geq M$，当 $n \geq k$ 时，$f^n(x) \in (c, a)$;

(ii) 对任 $i \geq 0$, $f^{M+2i}(x) \in (c, a)$, $f^{M+2i+1}(x) \in (b, d)$.

同样，对 y 也有

(i′) 存在 $k' \geq M$，当 $n \geq k'$ 时，$f^n(y) \in (b, d)$;

(ii′) $f^{M+2i}(y) \in (b, d)$, $f^{M+2i+1}(y) \in (c, a)$，对任 $i \geq 0$.

据(a) 式，S 中至多一点满足上述(i) 或(i′)，设为点 x_p，完全可重新考虑 $S - \{x_p\}$. 故可设仅有情形(ii) 与(ii′).

显然，情形(ii) 与(ii′) 同时成立时，与(b) 式相矛盾.

综上所述，至少存在一点 $x \in T$, x 的轨道与 I_0 相交. 重述上法，可从 $T - \{x\}$ 中选取一点 y, y 的轨道与 I_0 相交. I_0 为 f 的不变集，故存在充分大的 $N > 0$，使 $f^N(x)$ 及 $f^N(y)$ 为 $f|I_0$ 的紊动点偶. 由引理 3 知，f 是 ϵ- 紊动的.

定理 2 的证明 设 f 是 ϵ- 紊动的，由命题 1 知 $f|I_0$ 是 ϵ- 紊动的. 这时 $f|I_0$ 是满映射，由定理 1 知 σ_f 是 ϵ- 紊动的. 充分性由定理 1 可直接推得.

§4 非满映射的例子

本节给出一个三维欧氏空间的紧致子集上的非满映射 f, f 是 ϵ- 紊动的，但不存在 $\epsilon' > 0$，使 σ_f 是 ϵ'- 紊动的. 显然，类似的例子可以在欧氏平面上实现.

设三维欧氏空间 R^3 中点列

$$A = \{a_n: a_n = (0, 0, \frac{1}{n}), n \geq 1\};$$

$$B = \{b_n: b_n = (1, 0, \frac{1}{n}), n \geq 1\};$$

$$C = \{c_n: c_n = (0, 1, \frac{1}{n}), n \geq 1\}.$$

连结 a_n 与 b_n, b_n 与 c_n 及 c_n 与 $a_{n+1}(n \geq 1)$，得一连通曲丝 L. 设直线 $\{(0, \frac{1}{n}, z): z \in R\}$ 与 $c_i a_{i+1}(i \geq n)$ 的全部交点为 Q_n，直线 $\{(\frac{1}{n}, 0, z): z \in R\}$ 与 $a_i b_i(i \geq n)$ 的全部交点为 R_n，令 $W = \bigcup_{n=2}^{\infty}(Q_n \cup R_n) \cup A \cup B \cup C$，则 W 为可数集. 以 a_1 为始点沿 L 的逆时针方向将 W 中的点重新编号，得到一个点列 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$.

设 $B_n = (0, \frac{1}{n}, 0)\ (n \geq 1)$, $B_{-n} = (\frac{1}{n+1}, 0, 0)\ (n \geq 1)$; $B_0 = (1, 0, 0)$，原点 $O = (0, 0, 0)$. 取 $b_n c_n$ 的三等分点为 $t_n, s_n(n \geq 1)$, $B_0 B_1$ 的三等分点为 t_0, s_0.

定义映射 h 为:

$$h(A_n) = A_{n+1}(n \geq 1), h(B_n) = B_{n+1}(n \in Z), h(0) = 0,$$

h 在 $[A_n, A_{n+1}](n \geq 1)$ 及 $[B_n, B_{n+1}](n \in Z)$ 上是线性的.

定义映射 g 为:

(a) $g(b_n) = g(s_n) = b_n$, $g(t_n) = g(c_n) = c_n$, g 在 $[b_n, t_n]$, $[t_n, s_n]$ 及 $[s_n, c_n]$ 上是线性的;

(b) $g(B_0) = g(s_0) = B_0, g(t_0) = g(B_1) = B_1$, g 在$[B_0, t_0]$, $[t_0, s_0]$及$[s_0, B_1]$上是线性的;

(c) 当 $x \in (L \cup G) - (\bigcup_{n=0}^{\infty} b_n c_n \cup B_0 B_1)$ 时, $g(x) = x$, 其中 G 表示三角形 OB_0B_1.

显然, 有 $h, g \in C^0(L \cup G)$. g 在$[b_n, c_n]$上的限制 $g|[b_n, c_n]$ 有周期3, 故存在 $\epsilon > 0$, 使 g 是 ϵ- 紊动的. 令 S 为 $g|[b_1, c_1]$ 的不可数 ϵ- 紊动集.

记 $f = h \circ g$, 则 f 是非满映射. 容易看出, S 也是 f 的不可数 ϵ- 紊动集, f 是 ϵ- 紊动的. 显然, $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(L \cup G) = G$, 不存在 $\epsilon' > 0$, 使 $f|G$ 是 ϵ'- 紊动的. 由引理1知, 也不存在 $\epsilon' > 0$, 使 σ_f 是 ϵ'- 紊动的.

本文是在麦结华教授的精心指导下完成的, 写作过程中与曾凡平同志进行了有益探讨, 在此表示衷心感谢.

参 考 文 献

[1] G. W. Henderson, *The pseudo-arc as an inverse limit with one binding map*, Duke Math. J., 31 (1964), 421- 425.

[2] 麦结华, 一类描述非混沌映射的符号动力系统, 科学通报, 待发表.

[3] M. Kuchta and J. Smital, *Two point scrambled set implies chaos*, European Conference on Iteration Theory, 1989, 427- 430.

[4] 麦结华, 中国科学, A 辑, 12(1989), 1233—1241.

[5] L. Snoha, *Generic chaos*, European Conference on iteration theory, 1989, 347- 351.

[6] 李明军, 由回归点构成的不可数紊动集的存在性, 广西大学学报, 4(1992), 85—88.

ϵ- Chaos on Inverse Limit Space

Li Mingjun

(Guangxi Institute of Technology, Liuzhou 545005)

Abstract

Let f be a surjective to map of a compact metric space and denote by σ_f the shift map of the inverse limit space. We prove that there exist ϵ and $\epsilon' > 0$, f is ϵ- chaos iff σ_f is ϵ'- chaos; On the other hand, we also consider the condition as f is not onto or f is interval map.

Keywords inverse limit space, shift map, ϵ- chaos