第16卷第3期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 3
1996年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1996

分次环A, A_e和Smash积$A\#G^*$是亚直既约环的条件*

魏俊潮 陈建华
(扬州大学工学院, 225009) (扬州大学师范学院, 225002)

摘 要 讨论了分次环A, A_e和$A\#G^*$的相关性质, 在A是分次忠实时, $A\#G^*$是亚直既约环当且仅当A_e是亚直既约环; 在A是分次非退化时, $A\#G^*$是G-亚直既约环当且仅当A是分次亚直既约环.

关键词 亚直既约环, 分次非退化, Smash积
分类号 AMS(1991) 16D/CCL O153.3

设G是任意群, 一个环A称为G-分次环, 如果$A=\bigoplus_{g\in G}A_g$是加群直和, 且$A_gA_h\subseteq A_{gh}$, $\forall g, h\in G$. 若$A_gA_h=A_{gh}$, 则称A为强分次环. 设I是A的一个理想, 令$I_G=\bigoplus_{g\in G}(I\cap A_g)$, 则$I_G$也是$A$的一个理想, 如果$I_G=I$, 则称$I$是$A$的分次理想. 显然对于$A$的任意理想$I$, I_G是A的含于I中的最大的分次理想.

设A是G-分次环, 称A是分次非退化的如果$\forall a\in A$, 由$(a,A)_e=0$必有$a=0$, 且由$(A,a)_e=0$, 必有$a=0$; 称A是分次忠实的, 如果$\forall 0\neq a\in A_g$, $aA_h\neq 0, A_ha_g\neq 0$, $\forall g, h\in G$.

由文[1]知强分次环是分次忠实的, 而分次忠实的必是分次非退化的.

对于G-分次环A, 定义A和G的Smash积$A\#G^*$是一个自由左A-模$\bigoplus_{g\in G}AP_g$, 在其中定义乘法: $(aP_g)(bP_h)=(ab_{gh^{-1}})P_h$, $\forall a, b\in A$; $g, h\in G$, 这里b_x表示b在A_x($x\in G$)中的分量. 这样$A\#G^*$是一个结合环. 如果J是$A\#G^*$的一个理想, 令$J_A=\{\alpha\in A\mid aP_g\in J, \forall g\in G\}$, 则$J_A$是$A$的理想, 记$J^{\downarrow}=(J_A)_G$. 如果$I$是$A$的分次理想, 令$I\#G^*=\{\sum_{g\in G}\alpha P_g\in A\#G^*\mid a\in I\}=\sum_{g\in G}IP_g$, 则$I\#G^*$是$A\#G^*$的理想.

定义$(aP_x)^g=aP_{xg}$, $a\in A$, $x, g\in G$, 则G作为$A\#G^*$的一个自同构群作用于$A\#G^*$. $A\#G^*$的一个理想J称为G-稳定的, 如果$J^g\subseteq J$, $\forall g\in G$, $A\#G^*$的一个理想P称为G-素理想. 如果P是G-稳定的, 且对任意G-稳定理想I, J, 由$IJ\subseteq P$, 可推出$I\subseteq P$或$J\subseteq P$. 如果零理想是$A\#G^*$的G-素理想, 则称$A\#G^*$是G-素环.

定义1 称环A是亚直既约环, 如果A的所有非零理想的交H不为零, 称H为A的心, 若$H^2\neq 0$, 则易见$H^2=H$, 此时称H为A的幂等心, 否则称为幂零心.

可类似定义分次亚直既约环的概念.

在文[2]中引入了如下概念:

* 1993年12月24日收到

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

设 K 是 $A\#G^*$ 的理想, 令 $K_e=\{a\in A_e \mid aP_e\in K\}$, 则 K_e 是 A_e 的理想;

设 A 是 G- 分次环, I 是 A_e 的理想, 令 $[I]=\sum_{g\in G} A_g I A_{g^{-1}} P_g$, 则 $[I]$ 是 $A\#G^*$ 的理想

为方便计, 下面用 $I\lhd A$ 表示 I 是环 A 的理想

一般地, 设 $K\lhd A\#G^*$, $M\lhd A\#G^*$, $I\lhd A_e$, $J\lhd A_e$, 则有 $[K_e]\subseteq K$, $[I]_e\subseteq I$, 且 $M_eK_e\subseteq (MK)_e$, $[I][J]\subseteq [IJ]$, 而当 A 有单位元时, $[I]_e=I$, 进一步, 有下面引理:

引理 1 设 A 是 G- 分次环, A 是分次忠实的, $K\neq 0$, $K\lhd A\#G^*$, 则 $K_e\neq 0$.

证明 设 $0\neq \sum_{g,h} a_{g,h}P_g\in K$, $a_{g,h}\in A_h$, 假设 $a_{\alpha,\beta}\neq 0$, 则

$$(A_{(\beta\alpha)^{-1}}P_{\beta\alpha})\left(\sum_{g,h} a_{g,h}P_g\right)(A_\alpha P_e)=A_{(\beta\alpha)^{-1}}a_{\alpha,\beta}A_\alpha P_e\in K,$$

因分次是忠实的, 则 $A_{(\beta\alpha)^{-1}}a_{\alpha,\beta}A_\alpha\neq 0$, 因此 $K_e\neq 0$.

引理 2 设 A 是 G- 分次环, A 分次非退化, 则对 A 的任意非零分次理想 I, $I_e\neq 0$; 对 $A\#G^*$ 的任意 G- 稳定理想 $J\neq 0$ 则 $J^{\downarrow}\neq 0$, $J_e\neq 0$.

证明 设 $0\neq I$ 是 A 的分次理想, 若 $I_e=0$, 则 $\forall a\in I_g$, 因 $aA_{g^{-1}}\subseteq I_e$, 则 $aA_{g^{-1}}=0$, 从而 $(a,A)_e=0$. 由 A 的分次非退化知, $a=0$, 从而 $I_g=0$, $\forall g\in G$, 这样 $I=0$ 矛盾. 因此 $I_e\neq 0$.

设 $0\neq J$ 是 $A\#G^*$ 的 G- 稳定理想, 设 $0\neq \sum_{g,h} a_{g,h}P_h\in J$, $a_{g,h}\in A_g$, 则存在 $\alpha,\beta\in G$, 使得 $a_{\alpha,\beta}\neq 0$, 因 A 分次非退化, 则有 $A_{\alpha^{-1}}a_{\alpha,\beta}\neq 0$, 从而又有 $A_{\alpha^{-1}}a_{\alpha,B}A_e\neq 0$, 于是有

$$(A_{\alpha^{-1}}P_{\alpha\beta})\left(\sum_{g,h}\alpha_{g,h}P_h\right)(A_eP_\beta)=(A_{\alpha^{-1}}P_{\alpha\beta})\left(\sum_g a_{g,\beta}A_eP_\beta\right)=A_{\alpha^{-1}}a_{\alpha\beta}A_eP_\beta\in J,$$

因为 J 是 G- 稳定的, 则对任意 $g\in G$,

$$(A_{\alpha^{-1}}a_{\alpha,\beta}A_e)P_g=(A_{\alpha^{-1}}a_{\alpha,\beta}A_eP_\beta)^{\beta^{-1}g}\in J^{\beta^{-1}g}\subseteq J,$$

从而 $A_{\alpha^{-1}}a_{\alpha,\beta}A_e\in J_A$, 则 $A_{\alpha^{-1}}a_{\alpha,\beta}A_e\in J^{\downarrow}$, 从而 $J^{\downarrow}\neq 0$; 由于有 $A_{\alpha^{-1}}a_{\alpha,\beta}A_e\in A_e$, 且 $A_{\alpha^{-1}}a_{\alpha,\beta}A_eP_e\in J$, 从而 $J_e\neq 0$.

定理 1 设分次环 A 是分次忠实的, 则 $A\#G^*$ 是亚直既约环 $\Leftrightarrow A_e$ 是亚直既约环.

证明 设 $A\#G^*$ 的心为 H, 由引理 1, $H_e\neq 0$ 设 $0\neq I\lhd A_e$, 则 $0\neq [I]\lhd A\#G^*$, 从而 $[I]\supseteq H$, 则 $I\supseteq [I]_e\supseteq H_e\neq 0$, 这样易见 A_e 是心为 H_e 的亚直既约环.

反之设 N 是 A_e 的心, 设 $0\neq J\lhd A\#G^*$, 则 $J_e\neq 0$, 从而 $J_e\supseteq N$, 则 $J\supseteq [J_e]\supseteq [N]\neq 0$. 则 $A\#G^*$ 是心为 $[N]$ 的亚直既约环.

称 $A\#G^*$ 是 G- 亚直既约环, 如果 $A\#G^*$ 的所有非零 G- 稳定理想的交不为零. 其交 H 称为 G- 心.

由引理 2 易得下面推论:

推论 1 设分次环 A 是分次非退化的, 则 A_e 是亚直既约环, 蕴含 $A\#G^*$ 是 G- 亚直既约环.

证明 设 $0\neq J$ 是 $A\#G^*$ 的 G- 稳定理想, 由引理 2, $J_e\neq 0$, 则 $J_e\supseteq H$ (H 是 A_e 的心) 从而 $J\supseteq [J_e]\supseteq [H]\neq 0$, 从而 $A\#G^*$ 是 G- 亚直既约环.

推论 2 设分次环 A 是分次非退化的, 则 A_e 是亚直既约环, 蕴含 A 是分次亚直既约环.

证明 设 $0\neq I$ 是 A 的分次理想, 由引理 2 知 $I_e\neq 0$, 从而 $I_e\supseteq H$ (H 为 A_e 的心), 则 I

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$\supseteq H$, 从而A 是分次亚直既约环 心为H 在A 中生成的分次理想

定理 2　设分次环A 是分次非退化的, 则$A \# G^*$ 是G- 亚直既约环 $\Leftrightarrow A$ 是分次亚直既约环

证明　“$\Leftarrow$”　设$0 \neq J$ 是$A \# G^*$ 的G- 稳定理想, 则由引理 2, $J^{\downarrow} \neq 0$. 从而$J^{\downarrow} \supseteq H$ (其中H 为A 的分次心), 则$J \supseteq J^{\downarrow} \# G^* \supseteq H \# G^*$, 这样$A \# G^*$ 是有G- 心$H \# G^*$ 的G- 亚直既约环

“$\Rightarrow$”　设$A \# G^*$ 的G- 心为M, 则因M 是G- 不变的, 从而$M^{\downarrow} \neq 0$. 设$0 \neq I$ 是A 的分次理想, 则$I \# G^*$ 是$A \# G^*$ 的G- 不变理想 从而$I \# G^* \supseteq M$, 则$I \supseteq M^{\downarrow}$, 这样$A$ 是有分次心$M^{\downarrow}$ 的分次亚直既约环

注 1　“$\Rightarrow$”无需分次非退化性 因为设$\bigcap\limits_{\alpha} I_\alpha$ 是A 的所有非零分次理想的交, 则 $\forall \alpha$, $I_\alpha \# G^* \supseteq M$, 从而$(\bigcap\limits_{\alpha} I_\alpha) \# G^* = \bigcap\limits_{\alpha} (I_\alpha \# G^*) \supseteq M \neq 0$, 从而 $\bigcap\limits_{\alpha} I_\alpha \neq 0$.

对于推论 2 的逆是不成立的, 即使在强分次环的情况下也不成立

例 1　设K 是一个域, $R = M_n(K)$, 记$G = \{e, a\}$ 是二阶循环群, 令

$$R_e = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \middle| x, y \in K \right\}, R_a = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z \\ w & 0 \end{pmatrix} \middle| z, w \in K \right\}.$$

易见$R = R_e \oplus R_a$ 是强分次环, 而且由R 是单环得R 是分次单环 但

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| x \in K \right\}, I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \middle| y \in K \right\}$$

是R_e 的两个非零理想 $R_e = I_1 \oplus I_2$. 因此R_e 不是亚直既约环, 但R 是分次单环, 当然是分次亚直既约环

同样对推论 1 的逆也不成立 请看下例

例 2　设环R 同例 1, 则易见$R \# G^*$ 是G- 单环, 因而$R \# G^*$ 是G- 亚直既约环, 但由例 1 可知R_e 却不是亚直既约环

由文[3] 我们知道, 当A 是有单位元的G- 分次环, J 是$A \# G^*$ 的G- 稳定理想时, 则

$$J = J^{\downarrow} \# G^*.$$

对于没有单位元的分次环A, 可把它嵌入有单位元的分次环A_1, 而使A 成为A_1 的分次理想 从而$A \# G^* \lhd A_1 \# G^*$. 因此若P 是$A \# G^*$ 的半素理想或幂等理想时, 必有$P \lhd A_1 \# G^*$, 因而若 P 又是$A \# G^*$ 的G- 稳定理想时, 必有 $P = P^{\downarrow} \# G^*$.

推论 3　设A 是有单位元的G- 分次环, 则$A \# G^*$ 是G- 亚直既约环 $\Leftrightarrow A$ 是分次亚直既约环

注 2　“$\Rightarrow$”无需A 有单位元

由文[1] 知A 是分次半素的, 则A 必是分次非退化的, 而由文[4] 知$A \# G^*$ 是G- 素环 $\Leftrightarrow A$ 是分次素环, 从而有下面推论:

推论 4　设A 是G- 分次环, 则$A \# G^*$- 是有幂等G- 心的G- 亚直既约环 $\Leftrightarrow A$ 是有分次幂等心的分次亚直既约环

推论 5　设分次环A 是分次非退化的, A_e 是有幂等心的亚直既约环, 则A 是有分次幂等心的分次亚直既约环

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

由此又有下面推论:

推论 6　设分次环A 是分次非退化的,A_e 是有幂等心的亚直既约环, 则$A \# G^*$ 是有幂等G- 心的G- 亚直既约环.

下面的定理是定理 2 的推广:

定理 3　设A 是G- 分次环, $|G| < \infty$, 若$A \# G^*$ 是素环, 则A 是分次亚直既约环 $\Leftrightarrow A \# G^*$ 是亚直既约环.

证明　"⇒" 由定理 2 知$A \# G^*$ 是有G- 心H 的G- 亚直既约环. 设 $0 \neq I \lhd A \# G^*$, 则 $0 \neq I^X \lhd A \# G^*$. 由于$A \# G^*$ 是素环, $|G| < \infty$, 则 $\bigcap\limits_{X \in G} I^X \neq 0$. 从而 $\bigcap\limits_{X \in G} I^X \supseteq H$, 则 $I \supseteq H$. 由此$A \# G^*$ 是心为H 的亚直既约环.

引理 3　设A 是G- 分次环, 设P 是$A \# G^*$ 的素理想, 则 $\bigcap\limits_{X \in G} P^X = P^{\downarrow} \# G^*$.

证明　由于 $\bigcap\limits_{X \in G} P^X$ 是半素理想且是G- 稳定理想, 从而 $\bigcap\limits_{X \in G} P^X = (\bigcap\limits_{X \in G} P^X)^{\downarrow} \# G^*$. 由于 $\bigcap\limits_{X \in G} P^X \subseteq P$, 从而$(\bigcap\limits_{X \in G} P^X)^{\downarrow} \subseteq P^{\downarrow}$, 则 $\bigcap\limits_{X \in G} P^X \subseteq P^{\downarrow} \# G^*$, 但$P^{\downarrow} \# G^* \subseteq P$ 且$P^{\downarrow} \# G^*$ 是G- 稳定理想, 从而 $P^{\downarrow} \# G^* \subseteq \bigcap\limits_{X \in G} P^X$, 这样 $\bigcap\limits_{X \in G} P^X = P^{\downarrow} \# G^*$.

定理 4　设A 是分次单环, 则$A \# G^*$ 是单环的亚直和.

证明　令$\Sigma = \{J \lhd A \# G^* \mid J^{\downarrow} = 0\}$, 由于$0 \in \Sigma$, 则$\Sigma$不空. 由 Zorn 引理, Σ中存在极大元P, 易证P 是极大理想且是素理想. 从而由引理 3, $\bigcap\limits_{x \in G} P^x = P^{\downarrow} \# G^* = 0$, 从而

$$A \# G^* \cong \operatorname{sub}_{x \in G} \oplus A \# G^* / P^x,$$

而 $\forall x \in G, A \# G^* / P^x \cong A \# G^* / P$ 是单环.

定理 5　设A 是有单位元的G- 分次环, 则

i)　若P 是$A \# G^*$ 的素理想, 则P_e 是A_e 的素理想;

ii)　若$I \lhd A_e$, 使A_e / I 是有幂等心的亚直既约环, 则存在$P \lhd A \# G^*$, $P_e = I$, 而$A \# G^* / P$ 是有幂等心的亚直既约环.

证明　i)　设$J_1, J_2 \lhd A_e$, 使$J_1 J_2 \subseteq P_e$, 则有$[J_1 J_2] \subseteq [P_e] \subseteq P$. 从而$[J_1][J_2] \subseteq [J_1 J_2] \subseteq P$, 则$[J_1] \subseteq P$ 或$[J_2] \subseteq P$, 这样$J_1 = [J_1]_e \subseteq P_e$ 或$J_2 = [J_2]_e \subseteq P_e$, 因此$P_e$ 是A_e 的素理想.

ii)　令$\Sigma = \{J \lhd A \# G^* \mid J_e = I\}$, 由于$[I] \in \Sigma$, 则$\Sigma$不空, 从而$\Sigma$中存在极大元$P$, 设$J_1$, J_2 是$A \# G^*$ 的理想, $J_1, J_2 \supsetneq P$. 则$(J_1)_e \supsetneq I$, $(J_2)_e \supsetneq I$. 由I 的素性知$(J_1)_e (J_2)_e \nsubseteq I$, 由于$(J_1 J_2)_e \supseteq (J_1)_e (J_2)_e$ 则$(J_1 J_2)_e \nsubseteq I$, 从而$J_1 J_2 \nsubseteq P$, 因此P 是$A \# G^*$ 的素理想. 若$J \lhd A \# G^*$, $J \supsetneq P$, 则$J_e \supsetneq I$, 从而$J_e \supseteq H$ (其中H / I 是A_e / I 的幂等心), 因此

$$J \supseteq [J_e] + P \supseteq [H] + P \supsetneq P.$$

从而$A \# G^* / P$ 是有幂等心的亚直既约环且$P_e = I$.

定理 6　设A 是G- 分次环, I 是A 的分次理想, 使A / I 是有分次幂等心的分次亚直既约环, 则存在 $P \lhd A \# G^*$, $P^{\downarrow} = I$, 且$A \# G^* / P$ 是有幂等心的亚直既约环.

证明　令$\Sigma = \{J \lhd A \# G^* \mid J^{\downarrow} = I\}$, 易见 $I \# G^* \in \Sigma$, 则由 Zorn 引理Σ中存在极大元P, 则P 是$A \# G^*$ 的素理想. 实际上设$J_1, J_2 \lhd A \# G^*$, $J_1, J_2 \supsetneq P$, 则$J_1^{\downarrow} \supsetneq I$, $J_2^{\downarrow} \supsetneq I$, 从而由$I$ 的分次素性$J_1^{\downarrow} J_2^{\downarrow} \nsubseteq I$, 由于$J_1^{\downarrow} J_2^{\downarrow} \subseteq (J_1 J_2)^{\downarrow}$, 则$(J_1 J_2)^{\downarrow} \nsubseteq I$, 从而$J_1 J_2 \nsubseteq P$. 这样$P$ 是素理

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

想 设$J \lhd A \# G^*$, $J \supsetneqq P$, 则$J^{\downarrow} \supsetneqq I$, 从而$J^{\downarrow} \supseteq H$ (其中H/I为A/I的分次幂等心), 则$J \supseteq H \# G^* + P \supsetneqq P$. 因此$A \# G^*/P$是有幂等心的亚直既约环, 而且$P^{\downarrow} = I$.

感谢导师方洪锦教授、蔡传仁教授的帮助与指导.

参 考 文 献

[1] M. Cohen and S. Montgomery, *Group-graded rings Smash products and group actions*, TAMS. Vol 282, No. 1, 3(1984).

[2] 刘绍学, 关于 Smash product 的两个结果, 科学通报, Vol 13, 1989, 967-969.

[3] M. Beattie and P. Stewart, *Graded radicals of graded rings*, Acta Math Hung 14(1993).

[4] 陈惠香, Smash 积$A \# G^*$的G-素理想与A的分次素理想, 扬州师院学报(自然科学版), Vol 12, No. 3, 9(1992).

Conditions for a Graded Ring A、A_e and Smash Product $A \# G^*$ to be Subdirectly Irreducible Rings

Wei Junchao (Engineering College, Yanzhou University)

Chen Jianhua (Teacher's College, Yangzhou University)

Abstract

This paper deals with some retative properties of A and smash product $A \# G^*$; when A is graded faithful, $A \# G^*$ is subdirectly irreducible ring if and only if A_e is also. When A is Graded nondegenerate, $A \# G^*$ is G-subdirectly irreducible ring if and only if A is Graded subdirectly irreducible ring.

Keywords subdirectly irreducible ring, graded nondegerate, smash product.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.