第16卷第3期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 3
1996年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1996

K-f 环上格序模的张量积*

周 伟
(西南交通大学应用数学系, 成都610031)

摘 要 研究$\overset{p}{\underset{1}{\otimes}}R_i$的由$R_i(i=1,2,\cdots,p)$的序所诱导的序, 证明$\overset{p}{\underset{1}{\otimes}}R_i$在一定条件下作成一个有单位元的$f$环, 并在有单位元的$K$-$f$环上的格序模范畴中引入保格$R_1\otimes R_2$映射, 进一步定义了张量积, 使张量积概念在不同序环的序模范畴得到拓展

关键词 K-f环, 格序模, 张量积
分类号 AMS(1991) 06F25/CCL O153.1

1 K-f环张量积上的序关系

本文可视为文[4]的继续和深入, 因此所用概念及符号可详见[4].

引理1.1[4] 设R_i是K-格序环, $1\le i\le p$, 则$\overset{p}{\underset{1}{\otimes}}R_i$是$K$-格序环, 当$R_i$有单位元时, $1\le i\le p$, $\overset{p}{\underset{1}{\otimes}}R_i$是一个有单位元的$K$-格序环, 当$R_i$可换时, $1\le i\le p$, $\overset{p}{\underset{1}{\otimes}}R_i$是一个可换$K$-格序环.

现考虑[4]引理2.6证明中的l-同态$f_i: R_i\otimes R_i\to R_i$, 由$(r_{i1}\otimes r_{i2})f_i=r_{i1}r_{i2}$决定, $1\le i\le p$, 于是$r_{i1}\otimes r_{i2}\ge 0$当且仅当$r_{i1}r_{i2}\ge 0$, 因此由$R_i$中的序决定出$R_i\otimes R_i$中元素间的关系"$\le$": $r_{i1}\otimes r_{i2}\le r'_{i1}\otimes r'_{i2}$当且仅当在$R_i$里有$r_{i1}r_{i2}\le r'_{i1}r'_{i2}$. 于是有

引理1.2 设R_i是K-格序环, 则$R_i\otimes R_i$是以$P_i=\{r_{i1}\otimes r_{i2}\,|\,r_{i1}, r_{i2}\in R_i$且在$R_i$里有$r_{i1}r_{i2}\ge 0\}$为正锥的$K$-格序环, $1\le i\le p$.

作为此引理的推广, 易见一般地有

定理1.3 设R_i是K-格序环, 则$s(s\ge 2)$个R_i的张量积$\otimes_s R_i$是以$P_s=\{r_{i1}\otimes r_{i2}\otimes\cdots\otimes r_{is}\,|\,r_{ij}\in R_i, j=1,2,\cdots,s$, 且在$R_i$里有$r_{i1}r_{i2}\cdots r_{is}\ge 0\}$为正锥的$K$-格序环.

现考虑K-格序环$R_1\otimes R_2$上的格结构, 为此在$R_1\otimes R_2$的元素中定义一个关系"$\le$": $r_1\otimes r_2\le r'_1\otimes r'_2$当且仅当在$R_1$里有$r_1\le r'_1$且在$R_2$里有$r_2\le r'_2$, 注意这里的$R_1$与$R_2$可以相同, 也可以不相同. 对此关系, 有

引理1.4 设R_i是K-格序环, $i=1,2$, 则$R_1\otimes R_2$关于上述定义的其元素间的关系"$\le$"作成一个格序环.

证明 首先"$\le$"是$R_1\otimes R_2$上的一个半序, 这由直接验证"$\le$"的自反性、反对称性与传递性即得.

* 1993年11月24日收到

为证 $R_1\otimes R_2$ 关于"$\leq$"的正元对乘法封闭, 令 $r_1\otimes r_2, r_1'\otimes r_2'\in R_1\otimes R_2$ 且 $r_1\otimes r_2\geq 0$, $r_1'\otimes r_2'\geq 0$, 则有 $(r_1\otimes r_2)\circ(r_1'\otimes r_2') = [(r_1\otimes r_2)\otimes(r_1'\otimes r_2')](f_1\otimes f_2) = (r_1r_1')\otimes(r_2r_2')$, 因为 $r_1\otimes r_2\geq 0, r_1'\otimes r_2'\geq 0$, 则有 $r_1\geq 0, r_2\geq 0$ 且 $r_1'\geq 0, r_2'\geq 0$, 于是在 R_i 里有 $r_ir_i'\geq 0$, $i=1,2$. 因而 $(r_1\otimes r_2)\circ(r_1'\otimes r_2') = (r_1r_1')\otimes(r_2r_2')\geq 0$, 因此 $R_1\otimes R_2$ 的正元关于乘法封闭.

余下须证 $R_1\otimes R_2$ 关于"$\leq$"作成格, 为此设有 $r_1\otimes r_2, r_1'\otimes r_2'\in R_1\otimes R_2$, 因为在 R_i 里有 $r_i\vee r_i'\in R_i$, 且 $r_i, r_i'\leq r_i\vee r_i'$, $i=1,2$, 因而就有 $r_1\otimes r_2, r_1'\otimes r_2'\leq(r_1\vee r_1')\otimes(r_2\vee r_2')$. 又设有 $r_1''\otimes r_2''\in R_1\otimes R_2$, 使得 $r_1\otimes r_2, r_1'\otimes r_2'\leq r_1''\otimes r_2''$, 则在 R_i 里有 $r_i, r_i'\leq r_i''$, 因而在 R_i 里就有 $r_i\vee r_i'\leq r_i''$, $i=1,2$. 于是就有 $(r_1\vee r_1')\otimes(r_2\vee r_2')\leq r_1''\otimes r_2''$, 所以有 $(r_1\otimes r_2)\vee(r_1'\otimes r_2') = (r_1\vee r_1')\otimes(r_2\vee r_2')$, 因此 $R_1\otimes R_2$ 关于"$\leq$"作成格. 又 $R_1\otimes R_2$ 的环运算与"$\leq$"的相容性是明显的, 所以 $R_1\otimes R_2$ 是 K-格序环. 证毕.

现设 R_i 是 K-f 环, $i=1,2$. 有关格环, f 环的论述可详见文[5]和[6]. 下证

定理 1.5 设 R_i 是 K-f 环, $i=1,2$, 则 $R_1\otimes R_2$ 是 K-f 环.

证明 由设 R_i 是 K-f 环, 当然是 K-格序环, $i=1,2$. 因而由引理 1.4 知 $R_1\otimes R_2$ 是 K-格序环, 为证 $R_1\otimes R_2$ 是 K-f 环, 设 $r_1\otimes r_2, r_1'\otimes r_2', r_1''\otimes r_2''\in(R_1\otimes R_2)^+$, 须证当 $(r_1'\otimes r_2')\wedge(r_1''\otimes r_2'') = 0$ 时有 $[(r_1\otimes r_2)\circ(r_1'\otimes r_2')]\wedge(r_1''\otimes r_2'') = 0$ 及 $[(r_1'\otimes r_2')\circ(r_1\otimes r_2)]\wedge(r_1''\otimes r_2'') = 0$. 因为

$$\begin{aligned}[(r_1\otimes r_2)\circ(r_1'\otimes r_2')]\wedge(r_1''\otimes r_2'') &= [(r_1r_1')\otimes(r_2r_2')]\wedge(r_1''\otimes r_2'')\\ &= [(r_1r_1')\wedge r_1'']\otimes[(r_2r_2')\wedge r_2''],\end{aligned}$$

而由 $(r_1'\otimes r_2')\wedge(r_1''\otimes r_2'') = (r_1'\wedge r_1'')\otimes(r_2'\wedge r_2'') = 0$ 及 $R_1\otimes R_2$ 中的序关系可知在 R_1 里有 $r_1'\wedge r_1'' = 0$ 且在 R_2 里有 $r_2'\wedge r_2'' = 0$; 而由设 $r_1\otimes r_2\in(R_1\otimes R_2)^+$, 则在 R_1 里有 $r_1\geq 0$ 且在 R_2 里有 $r_2\geq 0$, 而 R_1 与 R_2 都是 f 环, 因而在 R_1 里有 $(r_1r_1')\wedge r_1'' = 0$ 且在 R_2 里有 $(r_2r_2')\wedge r_2'' = 0$, 因而在 $R_1\otimes R_2$ 里就有

$$[(r_1\otimes r_2)\circ(r_1'\otimes r_2')]\wedge(r_1''\otimes r_2'') = [(r_1r_1')\wedge r_1'']\otimes[(r_2r_2')\wedge r_2''] = 0.$$

同理可证在 $R_1\otimes R_2$ 里有 $[(r_1'\otimes r_2')\circ(r_1\otimes r_2)]\wedge(r_1''\otimes r_2'') = 0$, 于是 $R_1\otimes R_2$ 是 f 环, 因而是 K-f 环. 证毕.

由此定理及引理 1.1 有

定理 1.6 设 R_i 是有单位元的 K-f 环, $i=1,2$, 则 $R_1\otimes R_2$ 是一个有单位元的 K-f 环, 当 R_i 可换时, $i=1,2$, $R_1\otimes R_2$ 是可换 K-f 环.

注 这里的结论是针对这里所规定的序而言的.

对于 $p(\geq 2)$ 个 K-格序环的张量积 $\bigotimes_1^p R_i$, 同样可由 $R_i(i=1,2,\cdots,p)$ 上的序来定义 $\bigotimes_1^p R_i$ 中元素的一个关系"$\leq$": 在 $\bigotimes_1^p R_i$ 中 $r_1\otimes r_2\otimes\cdots\otimes r_p\geq 0$ 当且仅当在 R_i 中有 $r_i\geq 0$, $i=1,2,\cdots,p$. 则由前部分讨论不难得到

定理 1.7 设 R_i 是有单位元的 K-f 环, $1\leq i\leq p$, 则 $\bigotimes_1^p R_i$ 是一个有单位元的 K-f 环, 当 R_i 可换时, $1\leq i\leq p$, $\bigotimes_1^p R_i$ 是可换 K-f 环.

本节的论述, 最终得到一个有单位元的 K-f 环 $\bigotimes_1^p R_i$, 这为下节将张量积概念拓广到可以

是不同的格序环上的格序模范畴作了准备.

2　K-f 环上格序模的张量积

本节将对 K-f 环上的格序模定义张量积, 由于这里的格序模可以是任意不同的 K-f 环上的 格序模, 而文[2] 里的环模可视为平凡序的环模, 文[3] 里的格群可视为整数环 Z 上的格序模, 因此文[2], [3] 的相应结果可视为这里的特例.

2.1　设 M_i 是 K-f 环 R_i 上的格序模, $i=1,2$, M 是 K-f 环 $R_1\otimes R_2$ 上的格序模, 映射 $\varphi: M_1\times M_2\to M$ 称为保格 $R_1\otimes R_2$ 映射(l-$R_1\otimes R_2$ 映射), 如果 φ 满足以下条件:

(1) 对任意 $r_{i1}, r_{i2}\in R_i, m_{i1}, m_{i2}\in M_i, i=1,2$ 有

$$(r_{11}m_{11}+r_{12}m_{12}, r_{21}m_{21}+r_{22}m_{22})\varphi=\sum_{s,t=1}^{2}(r_{1s}\otimes r_{2t})(m_{1s}, m_{2t})\varphi;$$

(2) 对任意 $m_i\in M_i^+$, $i=1,2$, $(m_1,\cdot)\varphi$ 与 $(\cdot, m_2)\varphi$ 都是保格同态(l-同态).

2.2　设 M_i 是 K-f 环 R_i 上的格序模, $i=1,2$, K-f 环 $R_1\otimes R_2$ 上的 f 模 F 称为 M_1 与 M_2 的张量积, 如果存在 l-$R_1\otimes R_2$ 映射 $\varphi: M_1\times M_2\to F$ 且对于 $R_1\otimes R_2$ 上的任意 f 模 W 与 l-$R_1\otimes R_2$ 映射 $\tau: M_1\times M_2\to W$, 存在唯一的 l-同态 $\tau^*: F\to W$, 使得 $\varphi\tau^*=\tau$.

M_1 与 M_2 的张量积记为 $M_1\otimes M_2$, 显然这种张量积如果存在, 则必定是唯一的.

为证明 $M_1\otimes M_2$ 的存在性, 需要考虑集合 $M_1\times M_2$ 上的自由 f 模, 有关半序模上的自由 f 模及集合上的自由 f 模的论述可详见文[7], [8], 而有关半序群上的自由 l-群和集合上的自由 l-群的论述可见文[9], [10] 等. 在以下讨论中, 我们总假定 K-f 环 R_1 与 R_2 是有单位元的, 因而由定理 1.7 可知 $R_1\otimes R_2$ 是有单位元的 K-f 环, 于是由文[7] 定理 8 可知所论集合 $M_1\times M_2$ 上的自由 f 模存在.

定理 2.3　设 R_i 是有单位元的 K-f 环, M_i 是 R_i 上的格序模, $i=1,2$, 则 M_1 与 M_2 的张量积 $M_1\otimes M_2$ 存在且唯一.

证明　由设 R_i 是有单位元的 K-f 环, $i=1,2$, 因而 $R_1\otimes R_2$ 是有单位元的 K-f 环, 令 $S=\oplus_{M_1\times M_2}R_1\otimes R_2$ 是集合 $M_1\times M_2$ 上的平凡序自由模, 且令 $F_{M_1\times M_2}$ 是集合 $M_1\times M_2$ 上的自由 f 模, 由[7] 定理 8 可知 $F_{M_1\times M_2}$ 是 K-f 环 $R_1\otimes R_2$ 上的 f 模, 令 $\sigma: M_1\times M_2\to F_{M_1\times M_2}$ 是自然映射. 现设 N 是 $F_{M_1\times M_2}$ 的由所有如下形式的元素生成的凸 l-子模:

$$(1_{R_1}\otimes 1_{R_2})(r_{11}m_{11}+r_{12}m_{12}, r_{21}m_{21}+r_{22}m_{22})\sigma-\sum_{s,t=1}^{2}(r_{1s}\otimes r_{2t})(m_{1s}, m_{2t})\sigma,$$

这里 $r_{ij}\in R_i, m_{ij}\in M_i$, 1_{R_i} 是 R_i 的单位元, $i,j=1,2$.

$$(m_1, m_{21}\vee m_{22})\sigma-(m_1, m_{21})\sigma\vee(m_1, m_{22})\sigma,$$

这里 $m_1\in M_1^+, m_{2j}\in M_2, j=1,2$.

$$(m_{11}\vee m_{12}, m_2)\sigma-(m_{11}, m_2)\sigma\vee(m_{12}, m_2)\sigma,$$

这里 $m_{1j}\in M_1, j=1,2, m_2\in M_2^+$. 令 $W=F_{M_1\times M_2}/N$ 且令 $\varphi: M_1\times M_2\to W$, 由 $(m_1, m_2)\varphi=(m_1, m_2)\sigma+N$ 决定, 直接可验证 φ 是 l-$R_1\otimes R_2$ 映射. 下证 M_1 与 M_2 的张量积与 l-$R_1\otimes R_2$ 映射(定义 2.2 中的) 就是 (W, φ).

由 $F_{M_1\times M_2}$ 的构造可知 f 模 $F_{M_1\times M_2}$ 中的任意元素可以表示为 $\vee_i\wedge_j\sum_k r_{1ijk}\otimes r_{2ijk}(m_{1ijk},$

$m_{2ijk})\sigma$的形式, 这里 $r_{1ijk}\in R_1$, $r_{2ijk}\in R_2$, $m_{1ijk}\in M_1$, $M_{2ijk}\in M_2$, 且 i, j, k 分别属于有限集. 现设 W' 是 $R_1\otimes R_2$ 上的任意一个 f 模, $\tau: M_1\times M_2\to W'$ 是 l-$R_1\otimes R_2$ 映射, 对任意的 $x\in W$, 有 $x=\vee_i\wedge_j\sum_k r_{1ijk}\otimes r_{2ijk}(m_{1ijk}, m_{2ijk})\sigma+N$, 定义 $\tau^*: W\to W'$, 由 $[\vee_i\wedge_j\sum_k r_{1ijk}\otimes r_{2ijk}(m_{1ijk}, m_{2ijk})\sigma+N]\tau^*=\vee_i\wedge_j\sum_k r_{1ijk}\otimes r_{2ijk}(m_{1ijk}, m_{2ijk})\tau$ 决定. 首先可证这个定义是有意义的, 为此设 $x, x'\in W$, 则 $x=\vee_i\wedge_j\sum_k r_{1ijk}\otimes r_{2ijk}(m_{1ijk}, m_{2ijk})\sigma+N$, $x'=\vee_{i'}\wedge_{j'}\sum_{k'} r'_{1i'j'k'}\otimes r'_{2i'j'k'}(m'_{1i'j'k'}, m'_{2i'j'k'})\sigma+N$. 又设 $x=x'$, 则有

$$\vee_j\wedge_j\sum_k r_{1ijk}\otimes r_{2ijk}(m_{1ijk}, m_{2ijk})\sigma-\vee_{i'}\wedge_{j'}\sum_{k'} r'_{1i'j'k'}\otimes r'_{2i'j'k'}(m'_{1i'j'k'}, m'_{2i'j'k'})\sigma\in N.$$

由于 τ 是 l-$R_1\otimes R_2$ 映射, 则有

$$\vee_i\wedge_j\sum_k r_{1ijk}\otimes r_{2ijk}(m_{1ijk}, m_{2ijk})\tau=\vee_{i'}\wedge_{j'}\sum_{k'} r'_{1i'j'k'}\otimes r'_{2i'j'k'}(m'_{1i'j'k'}, m'_{2i'j'k'})\tau,$$

因此 τ^* 是有意义的, 且由 τ^* 的定义知它是 $W\to W'$ 的一个 l-同态并有 $\sigma\tau^*=\tau$, 因此 $M_1\otimes M_2$ 是存在的, $M_1\otimes M_2$ 的唯一性是明显的. 证毕.

参 考 文 献

[1] 周伯埙, 同调代数, 科学出版社, 1988.

[2] 周伯埙, 南京大学学报, 1(1979), 1—20.

[3] J. Martinez, Pacific J. Math., 41(1972), 771-789.

[4] 周 伟, 数学研究与评论, 1(1994), 83-87.

[5] F. W. Anderson, Proc. Amer. Math. Soc., 13(1962), 715-721.

[6] P. Conrad, J. Austral. Math. Soc., 16(1973), 385-415.

[7] W. Powell, Algebra Univ., 13(1981), 24-40.

[8] A. Bigard, Pacific J. Math., 49(1973), 1-6.

[9] P. Conrad, J. Algebra, 16(1970), 191-203.

[10] S. J. Bernau, Math. Ann., 186(1970), 249-262.

Tensor Products of Lattice Ordered Modules over K-f Rings

Zhou Wei

(Dept. of Appl. Math., Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031)

Abstract

Let R_i be K-f rings, where K is a commutative lattice ordered ring with identity. We discuss the order induced on $\overset{p}{\underset{1}{\otimes}} R_i$ by the original order on R_i and prove that $\overset{p}{\underset{1}{\otimes}} R_i$ is an f ring with respect to this order. Moreover $\overset{p}{\underset{i}{\otimes}} R_i$ is an f ring with identity if R_i is an f ring with identity, $i=1, 2, \cdots, p$. An l-$R_1\otimes R_2$ map is introduced into the category of lattice ordered modules over K-f rings where R_1 and R_2 may not equal and the tensor product of lattice ordered modules over K-f rings is defined. When M_i is a lattice ordered module over K-f ring R_i with identity, $i=1, 2$, we show that the tensor product of M_1 and M_2 exists uniquely.

Keywords K-f rings, lattice-ordered modules, tensor product.