第16卷第3期 1996年8月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 16 No. 3 Aug. 1996

扭转映射的一个不动点定理*

马如云　伏升茂　　　　李战存
(西北师范大学数学系, 兰州730070)　(兰州大学数学系, 730000)

摘　要　本文利用集连通理论, 给出了非保面积的扭转映射至少有两个不动点的一个新定理.

关键词　Poincaré-Birkhoff 定理, 扭转映射, 集连通
分类号　AMS(1991) 54H25/CCL O189.11

[1]推广的Poincaré-Birkhoff不动点定理, 在非线性Duffing方程调和解及次调和解个数问题研究中, 有着十分广泛而深刻的应用, 参见[2, 3]及[4]. 这个定理要求扭转映射为保面积同胚. 当扭转映射为非保面积映射时, 文[1]给出了扭转映射至少有一个不动点的一组充分条件. 本文将利用文[5]、[6]中的集连通理论, 给出非保面积的扭转映射至少有两个不动点的一个新定理.

命(r, θ)为平面$\mathbf{R}^2$上的一个极坐标系, 0为其极点. 用A表示$\mathbf{R}^2$上的一个给定的圆环域: $R_1 \leq r \leq R_2 (0 < R_1 < R_2)$.

定义　一个映射$T: A \to \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$称为"扭转"的, 如果它可以表示为

$$r^* = f(r, \theta), \quad \theta^* = \theta + g(r, \theta), \tag{1}$$

其中f和g在A上连续, 对于θ是2π周期的, 并且满足以下的"扭转条件":

$$g(R_1, \theta) \cdot g(R_2, \theta) < 0, \tag{2}$$

这里(r^*, θ^*)表示(r, θ)在映射T下的象点.

定理1　设$F: A \to \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$连续且为扭转映射, 如果存在$\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi), \theta_1 < \theta_2$, 使

$$[r - f(r, \theta_1)][r - f(r, \theta_2)] < 0 \tag{3}$$

对任$r \in [R_1, R_2]$成立, 则F在A中至少有两个不动点.

为了给出证明, 需要如下引理[5, Th. 0]

引理　设C为Banach空间X中的一个有界闭凸集, $K: [\alpha, \beta] \times C \to C, \alpha < \beta$, 是一个紧映象, 则集合

$$S_{\alpha,\beta} = \{(s, x) \in [\alpha, \beta] \times C \mid K(s, x) = x\}$$

中包含一条连结$\{\alpha\} \times C$与$\{\beta\} \times C$的连通分支$C_{\alpha,\beta}$.

定理1的证明　由于F在A上是扭转的, 故F在A上可以表示为

$$r^* = f(r, \theta), \quad \theta^* = \theta + g(r, \theta), \tag{4}$$

* 1993年9月7日收到. 甘肃省自然科学基金资助项目.

其中 f 和 g 连续, 对 θ 是 2π 周期的, 且满足

$$g(R_1,\theta)\cdot g(R_2,\theta) < 0. \tag{5}$$

为了确定起见, 不妨假定

$$g(R_1,\theta) > 0,\quad g(R_2,\theta) < 0, \tag{6}$$

记

$$J = \{(\theta, r) \in [\theta_1, \theta_1 + 2\pi] \times [R_1, R_2] \mid g(r,\theta) = 0\}, \tag{7}$$

则有如下事实:

如果 $(\theta_0, r_0) \in J$ 满足 $r_0 = f(r_0, \theta_0)$, 则 (r_0, θ_0) 为 F 在 A 上的不动点

下证 f 在 J 上至少有两个不动点 为此取常数 $d = R_2 + \max\limits_{\substack{\theta\in[0,2\pi]\\ R_1\le r\le R_2}} |g(r,\theta)|$, 定义

$$\hat{g}: [-d, d] \times [\theta_1, \theta_1 + 2\pi] \to [-d, d],$$

$$\hat{g}(r,\theta) = \begin{cases} g(R_2,\theta), & R_2 < r \le d,\ \theta_1 \le \theta \le \theta_1 + 2\pi, \\ g(r,\theta), & R_1 \le r \le R_2,\ \theta_1 \le \theta \le \theta_1 + 2\pi, \\ g(R_1,\theta), & -d \le r < R_1,\ \theta_1 \le \theta \le \theta_1 + 2\pi \end{cases}$$

作

$$K: [\theta_1, \theta_1 + 2\pi] \times [-d, d] \to [-d, d],$$
$$K(\theta, r) = \hat{g}(r,\theta) - r.$$

则 K 为紧映象 据引理, 集合

$$\begin{aligned} S_{\theta_1,\theta_1+2\pi} &= \{(\theta, r) \in [\theta_1, \theta_1 + 2\pi] \times [-d, d] \mid K(\theta, r) = r\} \\ &= \{(\theta, r) \in [\theta_1, \theta_1 + 2\pi] \times [-d, d] \mid \hat{g}(\theta, r) = 0\} \end{aligned}$$

中含有一条连结 $\{\theta_1\} \times [-d, d]$ 与 $\{\theta_1 + 2\pi\} \times [-d, d]$ 的连通分支 $C_{\theta_1,\theta_1+2\pi}$ 由 $\hat{g}$, J 的定义及 (6) 知

$$S_{\theta_1,\theta_1+2\pi} = J, \tag{8}$$

从而 $C_{\theta_1,\theta_1+2\pi} \subset J \subset [\theta_1, \theta_1 + 2\pi] \times [R_1, R_2]$, 即 $C_{\theta_1,\theta_1+2\pi}$ 亦为集合 J 中所包含的连结 $\{\theta_1\} \times [R_1, R_2]$ 与 $\{\theta_2\} \times [R_1, R_2]$ 的连通分支

令

$$C_{\theta_1,\theta_2} = \{(\theta, r) \in C_{\theta_1,\theta_1+2\pi} \mid \theta_1 \le \theta \le \theta_2\},$$

则 C_{θ_1,θ_2} 为 J 中连结 $\{\theta_1\} \times [R_1, R_2]$ 与 $\{\theta_2\} \times [R_1, R_2]$ 的连通集 由连通集上连续函数的介值性 ([7, 推论8 8]), f 的连续性及条件 (3) 推知: 存在 $(\bar\theta, \bar r) \in C_{\theta_1,\theta_2} \subset J$, 使 $f(\bar r, \bar\theta) = \bar r$. 进一步由条件 (3) 推知 $(\bar\theta, \bar r) \in ((\theta_1, \theta_2) \times [R_1, R_2]) \cap J$.

同理, 令

$$C_{\theta_2,\theta_1+2\pi} = \{(\theta, r) \in C_{\theta_1,\theta_1+2\pi} \mid \theta_2 \le \theta \le \theta_1 + 2\pi\},$$

则 $C_{\theta_2,\theta_2+2\pi}$ 为 J 中连结 $\{\theta_2\} \times [R_1, R_2]$ 与 $\{\theta_1 + 2\pi\} \times [R_1, R_2]$ 的连通集, 由条件 (3) 及连通集上连续函数的介值性[7, 推论8 8]可知, 存在 $(\tilde\theta, \tilde r) \in C_{\theta_2,\theta_1+2\pi} \subset J$, 使 $f(\tilde r, \tilde\theta) = \tilde r$. 由 (3), $(\tilde\theta, \tilde r) \in (\theta_2, \theta_1 + 2\pi) \times [R_1, R_2] \cap J$.

由于 $\theta_1 < \bar\theta < \theta_2$, 而 $\theta_2 < \tilde\theta < \theta_1 + 2\pi$, 因此证得 F 在 A 中至少有两个不动点 $(\bar r, \bar\theta)$ 和 $(\tilde r, \tilde\theta)$.

例 取 $A = \{(r,\theta) \mid 1 < r < 3\}$, $T: A \to \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, $T(r,\theta) = \{f(r,\theta), \theta + g(r,\theta)\}$, 其中 $f(r,\theta)$

$= r + \frac{1}{2}\sin\theta, g(r,\theta) = r - 2$, 则 T 为连续的扭转映射. 由于 $r - f(r, \frac{\pi}{2}) < 0, r - f(r, \frac{3\pi}{2}) > 0$, 故定理的全部条件均满足

参 考 文 献

[1] 丁伟岳, 数学学报, 2(1982), 227—235.

[2] Ding Tongren, Proc. Amer. Math. Soc., 1(1983), 56-66.

[3] T. Ding, R. Lannacci and F. Zanolin, *Existence and multiplicity results for periodic solutions of semilinear duffing equations*, Preprint.

[4] M. A. Del Pino, R. F. Manasevich and A. Murua, J. D. E., 95(1992), 240-258.

[5] D. G. Costa and J. V. A. Goncalves, J. Math. Anal. Appl., 84(1981), 328-337.

[6] I Massabo and J. Pejsachowicz, J. Funct. Anal., 59(1984), 151-166.

[7] 江泽涵, 拓扑学引论, 上海科技出版社, 1977.

A Fixed Points Theorem for Twist Maps

Ma Ruyun   Fu Shengmao

(Dept. of Math., Northwest Normal University, 730070)

Li Zhancun

(Dept. of Math., Lanzhou University, 730000)

Abstract

By the technique of connected set, we prove that a class of continuous maps, which are not necessarily an area-preserving homomorphism, has at least two fixed points

Keywords Poincaré-Birkhoff theorem, twist map, connected set