第16卷第3期　　数学研究与评论　　Vol.16 No.3
1996年8月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Aug. 1996

观测向量的变换对广义线性模型参数估计的影响*

刘　金　山
(五邑大学数理系, 广东江门市529020)

摘　要　本文一般地考察了观测向量 Y 用线性变换 FY 代替对广义线性模型 $Y=X\beta+\epsilon$ 的系数估计的影响, 得到了由变换引起的方差增量公式, 并由此得到了一个可估子空间, 当且仅当其中元素的估计优良性不因观测向量的变化而改变, 这一结果推广了文献[1]的结果.

关键词　广义 Gauss-Markoff 模型, 线性变换, 非负定离差阵.
分类号　AMS(1991) 62F10, 62J05/CCL O212.1

§1　引　言

考虑广义线性模型

$$Y=X\beta+\epsilon,\quad \epsilon\sim(0,\Sigma),\tag{1.1}$$

这里 Y 是 $n\times1$ 的观测向量, X 是秩为任意的 $n\times p$ 阶矩阵, Σ 是 $n\times n$ 阶非负定阵, 它是已知的, 或存在一个未知的正数因子. 对于 $k\times n$ 阶矩阵 F, 因 FY 代替 Y 一般给系数 β 的估计带来信息的损失. 文献[1]定性地证明了, 原模型(1.1)的整体可估函数集合 $X\beta$ 的最优线性无偏估计(BLUE)的优良性不因观测向量的变化而改变的充要条件是

$$\mu\{X\}\subset\mu\{TF'\},\tag{1.2}$$

这里 $\mu\{A\}$ 表示 A 的列张成的子空间, 而

$$T=\Sigma+XVX',\tag{1.3}$$

V 是任一满足 $\mu\{X\}\subset\mu\{T\}$ 的非负定阵.

注意到[1]的结论是关于模型(1.1)的可估函数集合的整体性质, 条件(1.2)蕴涵着

$$\mu\{X'(T^-)'X\}\subset\{X'(T^-)'TF'\},\tag{1.4}$$

这里 A^- 表示 A 的 g-逆. 根据 T 的定义知 $X'(T^-)'T=X'$, 且 $\mu\{X'(T^-)'X\}=\mu\{X'\}$, 因此(1.4)简化为

$$\mu\{X'\}\subset\mu\{X'F'\}.\tag{1.5}$$

但是反之(1.5)成立时(1.2)不一定成立, 而在条件(1.5)下模型(1.1)的所有可估函数的可估性在变换 FY 下保持不变, 且 β 的一些函数的BLUE的优良性在这样的变换下也能够保持不变.

本文通过方差的比较考察变换 FY 产生的信息损失对估计的影响, 推导出方差增量的一

* 1992年6月19日收到.

般结果,并由此得到一个可估子空间,其中元素的估计方差不因观测向量的改变而增加,这一结果是对[1]中结果的一个推广.

在以下讨论中, $r(A)$表示A的秩, A^+表示A的$g+$逆, $A^{\perp}$表示任一满足$A'A^{\perp}=0$, $r(A^{\perp})=n-r(A)$的列满秩阵.

§2 主要结果

为得到本文的主要结果,需要以下引理.

引理1 对于模型(1.1),函数$C'\beta$的BLUE为

$$C'\hat{\beta}=C'(X'T^-X)^-X'T^-Y+d'(I-TT^-)Y, \tag{2.1}$$

其中$C\in\mu\{X'\}$, d是任一向量, T由(1.3)定义.

证明见[2]中定理1.

引理2 若非负定阵A分块为

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

这里A_{ii}非负定.则

(i) $$A^+_{11\cdot2}=A^+_{11}+A^+_{11}A_{12}A^+_{22\cdot1}A_{21}A^+_{11}, \tag{2.2}$$

(ii) $$A^+_{11}A_{12}A^+_{22\cdot1}=A^+_{11\cdot2}A_{12}A^+_{22}, \tag{2.3}$$

这里$A_{11\cdot2}=A_{11}-A_{12}A^+_{22}A_{21}$, $A_{22\cdot1}=A_{22}-A_{21}A^+_{11}A_{12}$.

证明可根据分块矩阵广义逆公式及A^+的唯一性得到.

引理3 记集合$\mathbf{X}=\{x: x=Au \text{ 且 } Bu=0\}$,其中$x, u$是向量, A, B是已知矩阵.则

$$\dim\mathbf{X}=r(A', B')-r(B),$$

这里 dim 表示子空间维数.

证明见[3]中定理1.1.2.

引理4 设A, B是行数相同的矩阵.则

$$r(A, B)=r(A)+r[(I-AA^-)B].$$

证明见[4]中定理19.

以下记

$$W=FTF'. \tag{2.4}$$

根据引理1,对于任意向量$C\in\mu\{X'F'\}$,

$$C'\beta^*=C'(X'F'W^-FX)^-X'F'W^-FY+d'(I-WW^-)FY \tag{2.5}$$

是以下模型系数函数$C'\beta$的BLUE.

$$FY=FX\beta+e, \quad e\sim(0, F\Sigma F'). \tag{2.6}$$

定理1 设$C'\hat{\beta}$和$C'\beta^*$分别是原模型(1.1)和变换模型(2.6)的BLUE.则它们的方差满足

$$\mathrm{Var}(C'\beta^*)-\mathrm{Var}(C'\hat{\beta})=C'(X'T^-X)^-X'T^+ZR^+Z'T^+X(X'T^-X)^-C, \tag{2.7}$$

其中$C\in\mu\{X'F'\}$,而

$$Z = (T^{+}TF')^{\perp}, \quad R = Z'T^{+}(I - P_X)Z, \tag{2.8}$$

这里 $P_X = X(X'T^{+}X)^{+}X'T^{+}$ 是向空间 $\mu\{X\}$ 的投影阵

证明 注意到 $\mu\{X'T^{-}X\} = \mu\{X'\}$, $\mu\{X'F'W^{-}FX\} = \mu\{X'F'\}$. 以(2.1)和(2.5)容易推得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}(C'\beta^{*}) - \mathrm{Var}(C'\hat{\beta}) \\
&\quad = C'(X'F'W^{-}FX)^{-}X'F'W^{-}F\Sigma F'(W^{-})'FX(X'F'W^{-}FX)^{-}C \\
&\qquad - C'(X'T^{-}X)^{-}X'T^{-}\Sigma(T^{-})'X(X'T^{-}X)^{-}C \\
&\quad = C'(X'F'W^{-}FX)^{-}F'W^{-}F(T - XVX')F'(W^{-})'FX(X'F'W^{-}FX)^{-}C \\
&\qquad - C'(X'T^{-}X)^{-}X'T^{-}(T - XVX')(T^{-})'X(X'T^{-}X)^{-}C \\
&\quad = [C'(X'F'W^{-}FX)^{-}C - C'VC] - [C'(X'T^{-}X)^{-}C - C'VC] \\
&\quad = C'(X'F'W^{-}FX)^{-}C - C'(X'T^{-}X)^{-}C \\
&\quad = C'(X'F'W^{+}FX)^{+}C - C'(X'T^{+}X)^{+}C.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

若记

$$H = TF', \quad M = T^{+}TF', \tag{2.10}$$

则

$$X'F'W^{+}FX = X'T^{+}P_H X, \tag{2.11}$$

这里 $P_H = H(H'T^{+}H)^{+}H'T^{+} = TF'W^{+}FTT^{+}$.

若记 $T^{+}P_Z = T^{+}Z(Z'T^{+}Z)^{+}Z'T^{+}$. 则 $P_H Z = 0$, 且 $P_Z H = 0$, 于是

$$\begin{aligned}
0 &= T^{+}(P_H + P_Z - I)(Z, H) \\
&= T^{+}[H(H'T^{+}H)^{+}H' + Z(Z'T^{+}Z)^{+}Z' - T]T^{+}(Z, H).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

下面证明

$$r(T^{+}(Z, H)) = r(T^{+}). \tag{2.13}$$

由记法(2.10), $T^{+}(Z, H) = T^{+}(M^{\perp}, TF')$. 由 T 的非负定性, 存在正交阵 P 使

$$T = PNP', \quad N = \mathrm{diag}(\delta_1, \cdots, \delta_t, 0, \cdots, 0), \tag{2.14}$$

这里 $t = r(T)$, $\delta_i > 0\ (i = 1, \cdots, t)$. 记

$$N^{k} = \mathrm{diag}(\delta_1^{k}, \cdots, \delta_t^{k}, 0, \cdots, 0). \tag{2.15}$$

在此记号下 T 和 T^{+} 有以下分解式,

$$T = PNP' = T^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}, \quad T^{\frac{1}{2}} = PN^{\frac{1}{2}}P',$$

$$T^{+} = PN^{-1}P' = (T^{+})^{\frac{1}{2}}(T^{+})^{\frac{1}{2}}, \quad (T^{+})^{\frac{1}{2}} = PN^{-\frac{1}{2}}P'.$$

根据事实 $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$, 得

$$r(T^{+}) \geq r(T^{+}(M^{\perp}, TF')) \geq r(T^{\frac{1}{2}}T^{+}(M^{\perp}, TF')) = r((T^{+})^{\frac{1}{2}}M^{\perp}, T^{\frac{1}{2}}M). \tag{2.16}$$

又由于

$$((T^{+})^{\frac{1}{2}}M^{\perp})'T^{\frac{1}{2}}M = (M^{\perp})'(T^{+})^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}T^{+}TF' = (M^{\perp})'T^{+}TF' = (M^{\perp})'M = 0$$

所以(2.16)式右端满足

$$\begin{aligned}
r((T^{+})^{\frac{1}{2}}M^{\perp}, T^{\frac{1}{2}}M) &= r((T^{+})^{\frac{1}{2}}M^{\perp}) + r(T^{\frac{1}{2}}M) \\
&\geq r(T(T^{+})^{\frac{1}{2}}M^{\perp}) + r(T^{\frac{1}{2}}M)
\end{aligned}$$

$$= r(T^{\frac{1}{2}}M^{\perp}) + r(T^{\frac{1}{2}}M) \geq r(T^{\frac{1}{2}}(M^{\perp}, M))$$

$$= r(T^{\frac{1}{2}}) = r(T^{+}). \quad (2.17)$$

综合(2.16), (2.17)得(2.13).

利用事实: 当 $r(AB) = r(A)$ 时, $CAB = DAB \Leftrightarrow CA = DA$. 由(2.12), (2.13)得

$$T^{+}(P_H + P_Z) = T^{+}, \quad (2.18)$$

记

$$A = (X, Z)'T^{+}(X, Z) = \begin{pmatrix} X'T^{+}X & X'T^{+}Z \\ Z'T^{+}X & Z'T^{+}Z \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

把(2.18)代入(2.11)并应用引理2(i)得

$$(X'F'W^{+}FX)^{+} = (X'T^{+}P_H X)^{+} = (X'T^{+}(I - P_Z)X)^{+} = A_{11\cdot 2}^{+}$$

$$= (X'T^{+})X^{+} + (X'T^{+}X)^{+}X'T^{+}ZR^{+}Z'T^{+}X(X'T^{+}X)^{+}. \quad (2.19)$$

(2.19)代入(2.9)并注意到 $C'(X'T^{+}X)^{+}X' \doteq C'(X'T^{-}X)^{-}X'$ 即得(2.7).

定理2 对于原模型(1.1), $C'\beta^{*}$ 是 $C'\beta$ 的BLUE的充要条件是

$$C \in \mu\{X'F'\} \cap \mu\{X'T^{+}X(X'T^{+}ZR^{+})^{\perp}\}. \quad (2.20)$$

证明 **必要性** 若 $C'\beta^{*}$ 是 $C'\beta$ 的BLUE, 则 $C'\beta^{*}$ 必定是无偏估计. 但由于 $C'\beta^{*}$ 是 FY 的函数, 因此 $C\in\mu\{X'F'\}$. 由定理1并注意到 R 是非负定阵得

$$\mathrm{Var}(C'\beta^{*}) = \mathrm{Var}(C'\hat{\beta})$$

$$\Leftrightarrow C'(X'T^{-}X)^{-}X'T^{+}ZR^{+}Z'T^{+}X(X'T^{-}X)^{-}C = 0$$

$$\Leftrightarrow C'(X'T^{+}X)^{+}X'T^{+}ZR^{+} = 0$$

$$\Leftrightarrow (X'T^{+}X)^{+}C = (X'T^{+}ZR^{+})^{\perp}\alpha, \text{对某向量 } \alpha$$

$$\Leftrightarrow C = X'T^{+}X(X'T^{+}ZR^{+})^{\perp}\alpha \quad (2.21)$$

由此并由 $C\in\mu\{X'F'\}$ 得(2.20). 必要性得证.

充分性由定理1及等价关系(2.21)立即证得.

特别是当 $\mu\{X'F'\} = \mu\{X'\}$ 时以上两定理成立.

推论1 对于原模型(1.1), 及变换 FY, 若 $\mu\{X'F'\} = \mu\{X'\}$. 则对任意的 $C\in\mu\{X'\}$

(i) $\mathrm{Var}(C'\beta^{*}) - \mathrm{Var}(C'\hat{\beta}) = C'(X'T^{-}X)^{-}X'T^{+}ZR^{+}Z'T^{+}X(X'T^{-}X)^{-}C$;

(ii) $\mathrm{Var}(C'\beta^{*}) = \mathrm{Var}(C'\hat{\beta}) \Leftrightarrow C\in\mu\{X'T^{+}X(X'T^{+}ZR^{+})^{\perp}\}$.

在推论1中若进一步假定 $r(\Sigma, X) = n$, 则 T 可逆, 且这时 R 也可逆. 事实上, 由于 R 的阶数等于矩阵 Z 的列数, 而这时 $Z = (F')^{\perp}$. 于是

$$r(R) = r(Z'T^{-1}(I - P_X)Z) = r((I - P_X)Z) = \dim\{\alpha: \alpha = (I - P_X)u \text{ 且 } Fu = 0\}$$

$$= r(I - P_X', F') - r(F) = r[T^{\frac{1}{2}}(I - P_X', F')\mathrm{diag}(T^{-\frac{1}{2}}, I)] - r(F)$$

$$= r(I - T^{-\frac{1}{2}}X(T^{-\frac{1}{2}}X)^{+}, T^{\frac{1}{2}}F') - r(F)$$

$$= r(I - T^{-\frac{1}{2}}X(T^{-\frac{1}{2}}X)^{+}) + r(T^{-\frac{1}{2}}X(T^{-\frac{1}{2}}X)^{+}T^{\frac{1}{2}}F') - r(F)$$

$$= n - r(T^{-\frac{1}{2}}X) + r(T^{-\frac{1}{2}}X(T^{-\frac{1}{2}}X)^{+}T^{\frac{1}{2}}F') - r(F), \quad (2.22)$$

注意到 $T^{-\frac{1}{2}}X(T^{-\frac{1}{2}}X)^{+}T^{\frac{1}{2}}F' \doteq T^{-\frac{1}{2}}X(X'T^{-1}X)^{-}X'F'$, 且有不等式

$$r(X'F') \geq r(T^{-\frac{1}{2}}X(X'T^{-1}X)^- X'F') \geq r(X'T^{-1}X(X'T^{-1}X)^- X'F') = r(X'F').$$

又在推论1的条件下 $r(X'F') = r(X)$, 于是(2.22)简化为

$$r(R) = n - r(F) = r(Z). \tag{2.23}$$

由(2.23), 并根据 Z 的列满秩性知 R 是满秩方阵, 因此 R 可逆. 而这时等价关系(2.21)又简化为

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(C'\beta^*) = \mathrm{Var}(C'\hat{\beta}) &\Leftrightarrow Z'T^{-1}X(X'T^{-1}X)^- C = 0 \\ &\Leftrightarrow C \in \mu\{X'T^{-1}X(X'T^{-1}Z)^{\perp}\}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

综上得

推论2 对于原模型(1.1), 及变换 FY, 若 $\mu\{X'\} = \mu\{X'F'\}$, 且 $r(\Sigma, X) = n$, 则对任意的 $C \in \mu\{X'\}$,

(i) $\mathrm{Var}(C'\beta^*) - \mathrm{Var}(C'\hat{\beta}) = C'(X'T^{-1}X)^- X'T^{-1}Z[Z'T^{-1}(T - X(X'T^{-1}X)^- X')T^{-1}Z]^{-1}Z'T^{-1}X(X'T^{-1}X)^- C$;

(ii) $\mathrm{Var}(C'\beta^*) = \mathrm{Var}(C'\hat{\beta}) \Leftrightarrow C \in \mu\{X'T^{-1}X(X'T^{-1}Z)^{\perp}\}$.

由推论1, 推论2知, 当 $\mu\{X'\} = \mu\{X'F'\}$ 成立时, 存在 $\mu\{X'\}$ 的子空间

$$S = \begin{Bmatrix} \mu\{X'T^{+}X(X'T^{+}ZR^{+})^{\perp}\}, & \text{当 } T \text{ 奇异时}, \\ \mu\{X'T^{-1}X(X'T^{-1}Z)^{\perp}\}, & \text{当 } T \text{ 可逆时}, \end{Bmatrix}, \tag{2.25}$$

当 $C \in S$ 时, 原模型(1.1)的系数函数 $C'\beta$ 的BLUE 的统计优良性不因观测向量的变化而改变. 并且 $C \in S$ 时 $C'\beta$ 的BLUE 可从变换模型(2.6)得到.

特别是当文献[1]中条件 $\mu\{X\} \subset \mu\{TF'\}$ 满足时, 存在矩阵 K 使 $X = TF'K$, 于是

$$X'T^{+}Z = K'FTT^{+}Z = K'(T^{+}TF')'(T^{+}TF')^{\perp}. \tag{2.26}$$

这时子空间(2.25)就简化为

$$S = \mu\{X'T^{+}X\} = \mu\{X'\}. \tag{2.27}$$

由此可知, 本文得到的结果推广了文献[1]的结果.

参 考 文 献

[1] J. K. Baksalary, R. Kala, *Linear transformations preserving best unbiased estimations in a general Gauss-Markoff model*, The Annals of Statistics, Vol. 9, No. 4(1981), 913-916.

[2] C. R. Rao, *Choice of best linear estimators in the Gauss-Markoff model with a singular dispersion matrix*, Comm. Statist, Theor. Meth., A7(1978), 1199-1208.

[3] 王松桂, 线性模型的理论及其应用, 安徽教育出版社, 1987.

[4] G. A. Marsaglia, G. P. H. Styan, *Equalities and inequalities for ranks of matrices*, Linear and Multilinear Algebra, 2(1974), 269-292.

[5] 刘金山, 变换数据的广义 Gauss-Markoff 估计, 数理统计与应用概率, Vol. 16, No. 1, (1991), 42-47.

[6] 刘金山等, 变换数据对线性模型拟合值的影响, 数学季刊, Vol. 6, No. 3, (1991), 42-46.

[7] G. E. Pino, *Linear restrictions and two step least squares with applications*, Statistics and Probability letters, 2(1984), 545-548.

The Influence to Parameter Estimation in a General Linear Regression Model with Linear Transformations

Liu Jinshan

(Dept. of Math. and Phy., Wuyi University, Jiangmen, Guangdong, 529020)

Abstract

For an arbitrary rank general Gauss-Markoff model $Y = X\beta + \mu, \mu \infty (0, \Sigma)$, where Σ is a nonnegative ddefinite matrix, the effect of transforming the observable vector Y to FY is analyzed with respect to the variance of the Best Linear Unbiased Estimator (BLUE) of $C'\beta$. It is shown that there exists an estimable subspace S in which the BLUE of $C'\beta$ can be get as a function of FY. The result obtained in [1] is generalized in this paper.

Keywords general Gauss-Markoff model, linear transformation, nonnegative definite dispersion matrix.