第16卷第3期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 16 No. 3
1996年8月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Aug. 1996

华罗庚-王中烈型不等式*

王 挽 澜
(成都大学数理系, 610081)

摘　要　用控制不等式理论和动态规划方法推广了华罗庚-王中烈的不等式, 并建立了类似的其他结果

关键词　不等式, 控制理论, 动态规划
分类号　AMS(1991) 26D15/CCL O178.1

一　前言与引理

华罗庚教授在[1]中建立了如下有用而有趣的结果: 设 $\alpha > 0$, $\delta > 0$, 则

$$(\delta - x_1 - \cdots - x_n)^2 + \alpha(x_1^2 + \cdots + x_n^2) \geq k_n\delta^2, \tag{1}$$

等号仅当

$$x_1 = \cdots = x_n = h_n\delta \tag{2}$$

时取 这里 $k_0 = \alpha(n+\alpha)^{-1}$, $h_n = (n+\alpha)^{-1}$.

1992年, 王中烈教授在[2]中用动态规划方法和 Hölder-Lorentz 不等式[3]推广了上述结果(见下定理1中 $p > 0$时的两个不等式). 同时, 他还借助于非线性正泛函性质[4]建立了连续量情形的类似的积分不等式

本文的目的有二: 一方面, 借助于"近些年才形成一门新兴学科的控制不等式理论"[5]和有别于[2]的动态规划模型来证明(1)的推广命题 另一方面, 建立类似于上述结果的一些新的不等式, 统称为华罗庚-王中烈型不等式

下面尽可能使用[2], [5]中的术语和记号 常提到的集合有

$$\Omega = \{x \mid x_1 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0, x_1 + \cdots + x_n \leq \delta\},$$
$$\Omega_1 = \{x \mid x_1 > 0, \cdots, x_n > 0, x_1 + \cdots + x_n \leq \delta\},$$

其内部记为 Ω^0 与 Ω_1^0.

引理1　设 α 和 δ 为给定正数, 则函数

$$F_n(x) = (\delta - x_1 - \cdots - x_n)^p + \alpha^{p-1}(x_1^p + \cdots + x_n^p)$$

当 $p > 1$ ($p < 0$) 在 Ω 上(在 Ω_1 上)为严格 S-凸的; 当 $0 < p < 1$ 在 Ω 上为严格 S-凹的

证明　当 $p > 1$, 显见 $F_n(x)$ 为对称凸集 Ω 上的对称函数 因其偏导数为

* 1994年2月13日收到

$$\frac{\partial F_n(x)}{\partial x_j} = -p(\delta - x_1 - \cdots - x_n)^{p-1} + p\alpha^{p-1}x_j^{p-1}, \quad j = 1, \cdots, n,$$

故从 $p > 1$, 得

$$(x_1 - x_2)\left(\frac{\partial F_n(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_2}\right) = p\alpha^{p-1}(x_1^{p-1} - x_2^{p-1})(x_1 - x_2) > 0, \ \forall x \in \Omega^0, x_1 \neq x_2.$$

据[5]定理6.5(b), $F_n(x)$在Ω上为严格S-凸的.

同理可证$p < 0$和$0 < p < 1$的情形.

引理2[6] 设$x \in R^n_{++}$, $p_1, \cdots, p_n$为正权数, 则r阶加权平均

$$M_r(x, p) = \left(\frac{1}{P_n} \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^r\right)^{1/r}$$

除$x_1 = \cdots = x_n$外是关于r严格增的. 这里$P_n = p_1 + \cdots + p_n$, $r = 0$时得加权几何平均, $r = \pm\infty$时得$\max(x)$与$\min(x)$.

二 华罗庚-王中烈型不等式

下结果包含[2]的定理1, 且其证明还是别致的.

定理1 设α和δ为给定正数, 则当$p > 1$ ($p < 0$), 对于$\Omega(\Omega_1)$上的一切x有

$$F_n(x) \geq k_n^{p-1}\delta^p; \tag{3}$$

当$0 < p < 1$, 不等式(3)反向. 每种情况下, 等号仅当(2)成立时取.

证明 (i) 当$p > 1$, 易从方程组$\partial F_n(x)/\partial x_j = 0$, $j = 1, \cdots, n$解得驻点$H = (h_n\delta, \cdots, h_n\delta)$.

当x的分量满足$x_1 + \cdots + x_n = nh_n\delta$时, 据[5]命题1.4, H被x(强)控制, 记$x \succ H$. 故对于严格S-凸函数$F_n(x)$有$F_n(x) \geq F_n(H)$. 换言之, 要证明的不等式(3)成立, 等号仅当$x = H$时取, 即仅当(2)成立时取.

当x的分量满足$x_1 + \cdots + x_n = \beta \leq \delta$, 但$\beta \neq nh_n\delta$时, 置$y_i = nh_n\delta x_i/\beta$, $i = 1, \cdots, n$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$. 于是$y_1 + \cdots + y_n = nh_n\delta \leq nh_n\delta^2/\beta$. 对满足上条件的$y$使用引理1, 知函数$G_n(y) = \left(\frac{nh_n\delta^2}{\beta} - y_1 - \cdots - y_n\right)^p + \alpha^{p-1}(y_1^p + \cdots + y_n^p)$在对称凸集$\Omega^* = \{y \mid y_1 \geq 0, \cdots, y_n \geq 0, y_1 + \cdots + y_n \leq nh_n\delta^2/\beta\}$上为对称的严格$S$-凸的. 故从$y \succ H^*$推出$G_n(y) \geq G_n(H^*)$, 等号仅在$y_1 = \cdots = y_n = h_n(nh_n\delta^2/\beta)$时取. 这里$H^* = (\bar{y}, \cdots, \bar{y})$, $\bar{y} = nh_n^2\delta^2/\beta$. 换言之, 不等式(3)成立, 等号仅当$x_1 = \cdots = x_k = h_n\delta$时取.

(ii) 当$0 < p < 1$, 其证明类似于上面, 只须注意对应于上的函数$F_n(x)$与$G_n(y)$为严格S-凹的.

(iii) 当$p < 0$, 考究满足过渡约束

$$\delta - x_1 - \cdots - x_n = \lambda, \quad \lambda > 0, x_j > 0, 1 \leq j \leq n$$

的最小化问题$\varphi_n = \min F_n(x)$.

对于$p < 0 < 1$用引理2, 有

$$F_1(x) = \lambda^p + \alpha^{p-1}(\delta - \lambda)^p = \left\{\left[\frac{1 \cdot \lambda^p + \alpha^{-1} \cdot (\alpha(\delta - \lambda))^p}{1 + \alpha^{-1}}\right]^{1/p}\right\}^p (1 + \alpha^{-1})$$

$$\geq \left\{\left[\frac{1\cdot\lambda+\alpha^{-1}\cdot\alpha(\delta-\lambda)}{1+\alpha^{-1}}\right\}^{p}(1+\alpha^{-1}),$$

等号仅当 $\lambda=\alpha(\delta-\lambda)$ 时取, 即仅当 $x_1=(1+\alpha)^{-1}\delta=h_1\delta$ 时取, 这里 $h_1=(1+\alpha)^{-1}$.

据上, 可见最小值 $\varphi_1=k_1^{p-1}\delta^p$, 它是在 $x_1=h_1\delta$ 而 $\lambda=k_1\delta$ 处达到

再用引理2, 有

$$F_2(x)=\lambda^p+\alpha^{-1}\cdot\alpha^p(\delta-x_2-\lambda)^p+\alpha^{-1}\cdot\alpha^p x_2^p$$

$$=\left\{\left[\frac{1\cdot\lambda^p+\alpha^{-1}\cdot(\alpha(\delta-x_2-\lambda))^p+\alpha^{-1}\cdot(\alpha x_2)^p}{1+\alpha^{-1}+\alpha^{-1}}\right]^{1/p}\right\}^p(1+\alpha^{-1}+\alpha^{-1})$$

$$\geq\left\{\frac{1\cdot\lambda+\alpha^{-1}\cdot\alpha(\delta-x_2-\lambda)+\alpha^{-1}\cdot\alpha x_2}{1+\alpha^{-1}+\alpha^{-1}}\right\}^p(1+\alpha^{-1}+\alpha^{-1}),$$

等号仅当 $\lambda=\alpha(\delta-x_2-\lambda)=\alpha x_2$ 时取, 即仅当 $x_1=x_2=(2+\alpha)^{-1}\delta=h_2\delta$, 这里 $h_2=(2+\alpha)^{-1}$.

据上, 可见最小值 $\varphi_2=k_2^{p-1}\delta^p$, 它是在 $x_1=x_2=h_2\delta$ 而 $\lambda=k_2\delta$ 处达到

一般地, 对于任何 $m\geq 1$ 可从 φ_m 用引理2导出 φ_{m+1}, 其程序相同 因此, 可归纳地得到

$$\varphi_n=\min F_n(x)=k_n^{p-1}\delta^p,$$

它是在 $x_1=\cdots=x_n=h_n\delta$ 而 $\lambda=k_n\delta$ 处达到 证毕

注1 上面(iii)中的证明方法亦可用于(i)和(ii)的情形 反之, 控制不等式的方法亦可用于(iii)的情形

定理2 设 δ 为给定正数, 则当 $p>1$ $(p<0)$, 对于 $\Omega(\Omega_1)$ 上的一切 x 有

$$2^{1-p}\delta^p\leq(\delta-x_1-\cdots-x_n)^p+n^{p-1}(x_1^p+\cdots+x_n^p)\leq n^{p-1}\delta^p; \tag{4}$$

当 $0<p<1$, 不等式(4)反向 每种情况下, 前段不等式取等号仅当 $x_1=\cdots=x_n=\delta/2n$; 后段不等式取等号仅当 $x=\Delta_j=(\overbrace{0,\cdots,0,\delta}^{j},0,\cdots,0)$, $(1\leq j\leq n)$.

证明 只对 $0<p<1$ 的情形证明, 因其它情形可类似于下面进行论证

当 $0<p<1$, 定理1中(3)的反向不等式为 $F_n(x)\leq k_n^{p-1}\delta^p$. 令式中的 $\alpha=n$, 可得

$$(\delta-x_1-\cdots-x_n)^p+n^{p-1}(x_1^p+\cdots+x_n^p)\leq 2^{1-p}\delta^p,$$

等号仅当 $x_1=\cdots=x_n=h_\alpha\delta=\delta/2n$ 时取

下证(4)的反向不等式的后段: 对于对称凸集 $\Omega_2=\{x\mid x_1\geq 0,\cdots,x_{2n}\geq 0,x_1+\cdots+x_{2n}\leq\delta\}$ 上的对称函数 $F_{2n}(x)=(\delta-x_1-\cdots-x_{2n})^p+\alpha^{p-1}(x_1^p+\cdots+x_{2n}^p)$, 使用引理1, 知 $F_{2n}(x)$ 在 Ω_2 上为严格 S-凹的

注意集合 Ω 上的 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $\Delta_1=(\delta,0,\cdots,0)$ 可引出对应于 Ω_2 上的 $x'=(x_1,\cdots,x_n,y_{n+1},\cdots,y_{2n})$ 和 $\Delta_1'=(\delta,\overbrace{0,\cdots,0}^{2n-1})$, 这里 $y_{n+1}=\cdots=y_{2n}=((\delta-x_1)-x_2-\cdots-x_n)/n$. 据[5]定理1. 10, 知 $\Delta_1'\succ x'$. 这种控制还是严格的 事实上, 当 x 的分量至少有两个为正时, 显然不存在置换矩阵 M 使 $x'=\Delta_1'M$.

综上, 对于 $0<p<1$ 有 $F_{2n}(x')\geq F_{2n}(\Delta_1')$, 等号仅当 $x'=\Delta_1'$ 时取 换言之, 有

$$\left[\delta-\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=n+1}^{2n}(\delta-x_1-x_2-\cdots-x_n)/n\right]^p$$

$$+\alpha^{p-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^p+\sum_{i=n+1}^{2n}(\delta-x_1-x_2-\cdots-x_n)^p/n^p\right]\geq\alpha^{p-1}\delta^p,$$

简化, 得

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^p + n^{1-p}(\delta - \sum_{i=1}^{n} x_i)^p \geq \delta^p.$$

这正是(4)的反向不等式的后段, 等号仅当 $x = \Delta_1 = (\overbrace{\delta, 0, \cdots, 0}^{n-1})$ 时取. 由对称性, 等号仅当 $x = \Delta_j$ 时取($1 \leq j \leq n$). 证毕.

注2 可继续建立类似于上面(3)和(4)的华罗庚-王中烈型不等式. 例如, 当 $p > 1$ 有 $-\alpha^{p-1}\delta^p \leq f_n(x) \leq \delta^p$, 前段的等号仅当 $x = \Delta_j$ ($1 \leq j \leq n$) 时取; 后段的等号仅当 $x = (0, \cdots, 0)$ 时取. 事实上, 借助于函数 $f_n(x) = (\delta - \sum_{i=1}^{n} x_i)^p - \alpha^{p-1}(\sum_{i=1}^{n} x_i^p)$ 在 Ω 上为严格减而严格 S-凹可以证明.

参 考 文 献

[1] L. K. Hua, *Additive Theory of Prime Numbers* (*Translated by N. B. Ng*), in "Translations of Math. Monographs", Vol 13, Amer. Math. Soc., Providence, R I, 1965.

[2] Wang Chunglie, *Lo-Keng Hua inequality and dynamic programming*, J. Math. Anal. Appl., 166 (1992), 345-350.

[3] Wang Chunglie, *Functional equation approach in inequalities*, V I, ibid, 104 (1984), 95-102.

[4] Wang Chunglie, *Characheristics of nonlinear prositive functionals and their applications*, ibid, 95 (1983), 564-574.

[5] 王伯英, 控制不等式基础第一章, 北京师范大学出版社, 1990.

[6] 匡继昌, 常用不等式(第2版), 湖南教育出版社, 1993, 4-6.

On Hua-Wang Type Inequalities

Wang Wanlan

(Chengdu University, 610081)

Abstract

The so called Hua-Wang inequality is generalized using the majorization and dynamic programming, and some similar results are obtained.

Keywords inequality, majorization, dynamic programming.