第16卷第3期 数学研究与评论 Vol.16 No.3
1996年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1996

$(T+\lambda I)^{-1}$不一定是非扩张映射*

王 为 民
(东北大学数学系, 沈阳110006)

摘 要 设T是m-增生算子, I是恒等映射. 本文通过一个反例说明$(T+\lambda I)^{-1}$($\lambda>0$)不一定是非扩张映射.

关键词 半内积, m-增生算子, 非扩张映射
分类号 AMS(1991) 47H06/CCL O177.2

设X是实Banach空间, $(\cdot,\cdot)_+$表示半内积[1], 即

$$(x,y)_+=\|y\|\lim_{t\to 0^+}t^{-1}(\|y+tx\|-\|y\|),\quad x,y\in X.$$

显然, 当X是Hilbert空间时, 半内积就是内积.

算子$T:D(T)\subset X\to X$叫做增生的, 是指对所有$x,y\in D(T)$, $(Tx-Ty,x-y)_+\geq 0$. 增生算子T叫做m-增生的, 是指对某个$\lambda>0$(进而对所有$\lambda>0$), $R(\lambda T+I)=X$.

映射$T:D(T)\subset X\to X$叫做非扩张的, 是指对所有$x,y\in D(T)$, $\|Tx-Ty\|\leq\|x-y\|$. 由[3]可知, 如果T是m-增生的, 那么豫解式$(\lambda T+I)^{-1}:X\to D(T)$是非扩张映射, 其中$I$是恒等映射, $\lambda>0$.

最近, 何[2, 定理1]与刘[4, 定义2.2]指出: $(T+\lambda I)^{-1}$($\lambda>0$)是非扩张的. 然而, 此结论不是对所有的$\lambda>0$都正确.

反例: 设$X=(-\infty,+\infty)$, $D=(0,+\infty)$, $T=D\to X$, $Tx=-\frac{1}{x}$. 对所有$x,y\in D$

$$(Tx-Ty,x-y)_+=(Tx-Ty)(x-y)=\frac{(x-y)^2}{xy}\geq 0,$$

即T是增生的. 如果对$\lambda>0$, $u\in X$, $(\lambda I+I)x=u$, 那么

$$x^2-ux-\lambda=0;$$

$$x=\frac{u+\sqrt{u^2+4\lambda}}{2}\in D,$$

即T是m-增生的.

但是, 对$\lambda>0$, $u\in X$, 有

$$(T+\lambda I)^{-1}u=\frac{u+\sqrt{u^2+4\lambda}}{2\lambda}.$$

进而, 对$\lambda>0$, $u,v\in X$, 有

---

* 1993年8月1日收到

$$\left|(T+\lambda I)^{-1}u-(T+\lambda I)^{-1}v\right|=\left|u-v\right|\left|\frac{1}{2\lambda}+\frac{u+v}{2\lambda(\sqrt{u^2+4\lambda}+\sqrt{v^2+4\lambda})}\right|.$$

特别地, **选取** $\lambda<\frac{1}{2}, u, v>0$, **则有**

$$\left|(T+\lambda I)^{-1}u-(T+\lambda I)^{-1}v\right|>\left|u-v\right|,$$

即 $(T+\lambda I)^{-1}$ **不是非扩张的**.

参 考 文 献

[1] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1985.

[2] Z. He, *Some mapping theorems involving the perturbations of m-accretive operators*, Nonlinear Analysis, 19(1992), 345-351.

[3] T. Kato, *Nonlinear semigroups and evolution equations*, J. Math. Soc. Japan, 19(1967), 508-520.

[4] N. G. Liu, *The generalized degree for 1-set contraction mapping perturbation of m-accretive operator and applications*, Nonlinear Analysis, 18(1992), 605-618.

$(T+\lambda I)^{-1}$ is not Necessarily a Nonexpansive Mapping

Wang Weimin

(Dept. of Math., Northeast University, Shenyang 110006)

Abstract

A counterexample is given to show that the mapping $(T+\lambda I)^{-1}$ may be expansive.

Keywords semi inner product, m-accretive operator, nonexpansive mapping.