第16卷第4期 数学研究与评论 Vol.16 No.4
1996年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1996

Banach 空间 X 的弱局部 Z_k 性质*

何宗祥　　李庆德
(安徽师范大学数学系，芜湖241000)

摘　要　本文引入了Banach 空间 X 的弱局部 Z_k 性质和弱 Z_k 性质，得出了：Banach 空间 X 是 K-NUC 空间的一个充分必要条件和Banach 空间 X 是 LK-NUC 空间的一个充分条件．并指出弱 Z_k 性质蕴含弱Banach-Saks 性质．

关键词　局部 K 接近一致凸，K 接近一致凸，弱局部 Z_k 性质，弱 Z_k 性质
分类号　AMS(1991) 46B20/CCL O177.2

1980 年，R. Huff 在文[1]中引入了NUC 空间和UKK 空间．对于NUC 空间，1983 年俞鑫泰在文[2]中指出：KUR 空间是NUC 空间；并在文[3]中给出了自反的UKK 空间是NUC 空间的一个充分必要条件．1991 年，Denka Kutzarova 在文[4]中引入了LK-NUC 空间和K-NUC 空间，并指出K-NUC 空间是NUC 空间．本文在此基础上，引入了弱局部 Z_k 性质和弱 Z_k 性质．着重讨论这两个性质以及它们与LK-NUC 空间和K-NUC 空间之间的关系．

1　定义及性质

设 X 是Banach 空间，X^* 是 X 的共轭空间，

$$S(X)=\{x\in X,\ \|x\|=1\};U(X)=\{x\in X,\ \|x\|\leq 1\}.$$

定义 1[4]　称Banach 空间 X 是LK-NUC 空间，若对任意 $\epsilon>0$，及 $x_0\in U(X)$，存在 $\delta(\epsilon,x_0)\in(0,1)$，对任意 $\{x_n\}\subset U(X)$，$\mathrm{Sep}(x_n)>\epsilon$，有 $x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k}\in\{x_n\}$，使得 $\frac{1}{k+1}\|x_0+x_{n_1}+\cdots+x_{n_k}\|\leq 1-\delta$．

定义 2　称Banach 空间 X 具有弱局部 Z_k 性质(简记为：LW Z_k)，若对任意 $\epsilon>0$，及 $x_0\in U(X)$，存在 $\delta(\epsilon,x_0)\in(0,1)$，对任意 $\{x_n\}\subset U(X)$，$x_n\xrightarrow{w}x$，$\|x\|<1-\epsilon$，有 $x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k}\in\{x_n\}$，使得 $\frac{1}{k+1}\|x_0+x_{n_1}+\cdots+x_{n_k}\|\leq 1-\delta$．

定义 3[4]　称Banach 空间 X 是K-NUC 空间，若对任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta(\epsilon)\in(0,1)$，使得对任意 $\{x_n\}\subset U(X)$，$\mathrm{Sep}(x_n)>\epsilon$，有 $x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k}\in\{x_n\}$，使得 $\frac{1}{k}\|x_{n_1}+\cdots+x_{n_k}\|\leq 1-\delta$．

定义 4　称Banach 空间 X 具有弱 Z_k 性质(简记为：W Z_k)，若对任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta(\epsilon)\in(0,

* 1994年3月9日收到．96年4月15日收到修改稿．

1), 对任意$\{x_n\} \subset U(X)$, $x_n \xrightarrow{w} x$, $\|x\| < 1-\epsilon$, 有$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k} \in \{x_n\}$, 使得

$$\frac{1}{k}\|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\| \leq 1 - \delta$$

定义 5[5] 若$\{f_n\} \subset U(X^*)$, $x \in S(X)$, $f_n(x) \to 1$, 则$\{f_n\}$有收敛子列, 则称Banach 空间X 有(S) 性质

从定义可以得出: 对任何正整数$k\rangle 2$, 具有W Z_k 性质的空间具有LW Z_k 性质

2 定理及证明

定理 1 L K-NUC 空间具有LW Z_k 性质

证明 对任意$\epsilon > 0$, 及$x_0 \in U(X)$, $\{x_n\} \subset U(X)$, $x_n \xrightarrow{w} x$, $\|x\| < 1-\epsilon$

1) 若$\{x_n\}$中有无限项满足: $\|x_n\| \leq 1 - \frac{\epsilon}{2}$. 则由

$$\frac{1}{k+1}\|x_0 + x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\| \leq 1 - \frac{k}{k+1}\frac{\epsilon}{2} < 1 - \frac{\epsilon}{4}$$

知, 取$\delta = \frac{\epsilon}{4}$定理即成立

2) 若$\{x_n\}$中有无限项满足: $\|x_n\| > 1 - \frac{\epsilon}{2}$, 不妨假设$\{x_n\}$中每一元素均满足: $\|x_n\| > 1 - \frac{\epsilon}{2}$. 故存在$x_{n_1} \in \{x_n\}$, 使得$\|x_{n_1}\| > 1 - \frac{\epsilon}{2}$. 对于$x_{n_1}$, 存在$f_1 \in S(X^*)$使得$f_1(x_{n_1}) = \|x_{n_1}\|$ 由条件$x_n \xrightarrow{w} x$, $\|x\| < 1-\epsilon$知: 对$\frac{\epsilon}{4}$及f_1, 存在$N_1(> n_1)$. 当$n > N_1$时, 有$|f_1(x_n - x)| < \frac{\epsilon}{4}$. 故$|f_1(x_n)| < \frac{\epsilon}{4} + |f_1(x)| \leq \frac{\epsilon}{4} + \|x\| < 1 - \frac{3\epsilon}{4}$. 从而存在$x_{n_2} \in \{x_n\}_{n=N_1+1}^{\infty}$, $\|x_{n_2}\| > 1 - \frac{\epsilon}{2}$且$\|x_{n_1} - x_{n_2}\| \geq |f_1(x_{n_1})| - |f_2(x_{n_2})| \geq \|x_{n_1}\| - (1 - \frac{3\epsilon}{4}) > (1 - \frac{\epsilon}{2}) - (1 - \frac{3\epsilon}{4}) = \frac{\epsilon}{4}$; 同理可以找到$x_{n_3} \in \{x_n\}$, 使得$\|x_{n_3}\| > 1 - \frac{\epsilon}{2}$且$\|x_{n_1} - x_{n_3}\| > \frac{\epsilon}{4}$, $\|x_{n_2} - x_{n_3}\| > \frac{\epsilon}{4}$, 依此方法可找到一列$\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$, 使得 $\mathrm{Sep}(x_{n_i}) > \frac{\epsilon}{4}$. 再由$X$是L K-NUC 空间知: 对$\frac{\epsilon}{4}$及$x_0 \in U(X)$, 存在$\delta(\frac{\epsilon}{4}, x_0) \in (0, 1)$及$x_n^1, \cdots, x_n^k \in \{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$, 使得$\frac{1}{k+1}\|x_0 + x_n^1 + \cdots + x_n^k\| \leq 1 - \delta(\frac{\epsilon}{4}, x_0)$.

从而由1), 2) 知: 对上述任意$\epsilon > 0$及$x_0 \in U(X)$, 存在$\delta = \min(\frac{\epsilon}{4}, \delta(\frac{\epsilon}{4}, x_0)) \in (0, 1)$. 对任意$\{x_n\} \subset U(X)$, $x_n \xrightarrow{w} x$, $\|x\| < 1-\epsilon$, 有$\{x_n\}$中k个元素$y_1, \cdots, y_k$, 使得$\frac{1}{k+1}\|x_0 + y_1 + \cdots + y_k\| \leq 1 - \delta$ 即X 有LW Z_k 性质 证毕

注 1 仿照定理 1 的证明, 类似地可以得到: K-NUC 空间具有W Z_k 性质

定理 2 具有LW Z_k 性质的NUC 空间是L K-NUC 空间

证明 对任意$\epsilon > 0$, 及$x_0 \in U(X)$, 若任意$\{x_n\} \subset U(X)$, $\mathrm{Sep}(x_n) > \epsilon$ 由X 是NUC 空

间知: X 是自反的UKK 空间, 故$\{x_n\}$有弱收敛子列 不妨仍记为: $\{x_n\}$, $x_n \xrightarrow{w} x$, 再由 $\mathrm{Sep}(x_n) > \epsilon$, 及$X$ 是UKK 空间知: 存在 $\delta_1(\epsilon) \in (0,1)$, 使得 $\|x\| < 1 - \delta_1(\epsilon)$. 又由于$X$ 具有LWZ$_k$ 性质, 故存在 $\delta(x_0, \delta_1(\epsilon)) \in (0,1)$ 及 $x_{n_1}, \cdots, x_{n_k} \in \{x_n\}$, 使得$\frac{1}{k+1}\|x_0 + x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\| \leq \delta(x_0, \delta_1(\epsilon))$. 从而可知$X$ 是LK-NUC 空间 证毕

根据注1 及文[4], 仿照定理2 的证明, 可以断言, 下列条件等价:

(1) X 是K-NUC 空间

(2) X 是具有WZ$_k$ 性质的NUC 空间

(3) X 是具有WZ$_k$ 性质的T-NUC 空间($T \in \mathbf{N}$, $T > K$).

定理3 对具有LWZ$_k$ 性质的Banach 空间X, 若X^* 有(S) 性质, 则X 是CL-KR 空间

证明 若 $x_0 \in S(X)$, $\{x_n\} \subset U(X)$, $\frac{1}{k+1}\|x_0 + x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\| \to 1$ 但$\{x_n\}$没有收敛子列

由X^* 有(S) 性质及文[5] 知: X 自反且具有(H) 性质, 则$\{x_n\}$有弱收敛子列 不妨仍记为$\{x_n\}$, $x_n \xrightarrow{w} x$. 由$\frac{1}{k+1}\|x_0 + x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\| \to 1$ 知: $\|x_n\| \to 1$, 而X 具有(H) 性质, 故存在 $\delta_1 \in (0,1)$, 使得 $\|x\| < 1 - \delta_1$, 否则与$\{x_n\}$没有收敛子列矛盾

由条件知: X 具有LWZ$_k$ 性质, 故对 δ_1, 存在 $\delta(\delta_1, x_0) \in (0,1)$ 及充分大的 $\overline{n_1}, \cdots, \overline{n_k} \in \{\overline{n}\}_{n=1}^{\infty}$, 使得$\frac{1}{k+1}\|x_0 + x_{\overline{n_1}} + \cdots + x_{\overline{n_k}}\| \leq 1 - \delta(\delta_1, x_0)$ 显然与$\frac{1}{k+1}\|x_0 + x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}\| \to 1$ 矛盾 故原假设不成立, 即$\{x_n\}$有收敛子列, 从而X 是CL-KR 空间 证毕

定理4 具有WZ$_k$ 性质的Banach 空间X 具有WBSP.

证明 若$\{x_n\} \subset U(X)$, $x_n \xrightarrow{w} \theta$, 由于$X$ 具有WZ$_k$ 性质, 且 $\|\theta\| = 0 < 1 - \frac{1}{2}$, 故存在 $\delta(\frac{1}{2}) \in (0,1)$ 及 $n_1^{(1)}, \cdots, n_k^{(1)} \in \{n\}$ 使得$\frac{1}{k}\|x_{n_1^{(1)}} + \cdots + x_{n_k^{(1)}}\| \leq 1 - \delta(\frac{1}{2})$.

对于$\{x_n\}_{n > n_k^{(1)}}^{\infty}$, $x_n \xrightarrow{w} \theta$ 同理也存在 $n_1^{(2)}, \cdots, n_k^{(2)} \in \{n\}_{n > n_k^{(1)}}$ 使得$\frac{1}{k}\|x_{n_1^{(2)}} + \cdots + x_{n_k^{(2)}}\| \leq 1 - \delta(\frac{1}{2})$, $\cdots$; 依此方法, 可找到一列点$\{x_{n_i^{(j)}}\}_{i=1, j=1}^{k, \infty}$, 均满足:

$$\frac{1}{k}\|x_{n_1^{(j)}} + \cdots + x_{n_k^{(j)}}\| \leq 1 - \delta(\frac{1}{2}), \quad j = 1, 2, \cdots. \qquad (*)$$

若令

$$y_j = [\frac{1}{k}(x_{n_1^{(j)}} + \cdots + x_{n_k^{(j)}})] / [1 - \delta(\frac{1}{2})],$$

显然$y_j \xrightarrow{w} \theta$且$y_j \in U(X)$. 由于$X$ 有WZ$_k$ 性质, 且 $\|\theta\| = 0 < 1 - \frac{1}{2}$. 故存在 $j_1^{(1)}, \cdots, j_k^{(1)} \in \{j\}$ 使得:

$$\frac{1}{k}\|y_{j_1^{(1)}} + \cdots + y_{j_k^{(1)}}\| \leq 1 - \delta(\frac{1}{2}), \quad l = 1, 2, \cdots$$

$\cdots\cdots$, 继续下去, 可以找到$\{y_j\}$ 的一列点$\{y_{j_i^{(l)}}\}_{i=1, l=1}^{k, \infty}$, 均满足:

$$\frac{1}{k}\|y_{j_1^{(l)}} + \cdots + y_{j_k^{(l)}}\| \leq 1 - \delta(\frac{1}{2}), \qquad (**)$$

从而

$$\frac{1}{k}\left\|\frac{\frac{1}{k}(x_{n_1(j_1^{(l)})}+\cdots+x_{n_k(j_1^{(l)})})}{1-\delta(\frac{1}{2})}+\cdots+\frac{\frac{1}{k}(x_{n_1(j_k^{(l)})}+\cdots+x_{n_k(j_k^{(l)})})}{1-\delta(\frac{1}{2})}\right\|\leq 1-\delta(\frac{1}{2}),\ l=1,2,\cdots,$$

故

$$\frac{1}{k^2}\|x_{n_1(j_1^{(l)})}+\cdots+x_{n_k(j_1^{(l)})}+\cdots+x_{n_1(j_k^{(l)})}+\cdots+x_{n_k(j_k^{(l)})}\|\leq[1-\delta(\frac{1}{2})]^2,\ l=1,2,\cdots$$

即 $\{x_n\}$ 中 k^2 个元素平均后的范数小于 $[1-\delta(\frac{1}{2})]^2$. 由于对任意 $\epsilon>0$, $0<1-\delta(\frac{1}{2})<1$. 故存在 $\gamma\in\mathbf{N}$, 使得 $[1-\delta(\frac{1}{2})]^\gamma<\epsilon$. 因此, 将上述过程重复 γ 次, 则可以得到 $\{x_n\}$ 中 K^γ 个元素平均后的范数小于 ϵ. 从而由文[7]定理 2 得 X 具有 WBSP. 证毕.

下面的例子表明: 具有 LWZ_k 性质的空间, 不一定是 LK-NUC 空间.

设 $x=(x^1,x^2,\cdots)\in l^2$, $x'=(0,x^2,\cdots)$. 定义: $\|x\|_s=\max\{|x^1|,\|x'\|_2\}$, 设 $\{\alpha_n\}$ 是单调下降趋于零的正实数列. 令 $T: l^2\to l^2$ 为 $T(x^1,x^2,x^3,\cdots)=(x^1,\alpha_2x^2,\alpha_3x^3,\cdots)$. 进而定义 $\|x\|_w=(\|x\|_s^2+\|Tx\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$, 则由文[8]知 $(l^2,\|\cdot\|_w)$ 是 WLUR, 但不是 LUR.

现证 WLUR 蕴含 LWZ_k 性质. 对任意 $\epsilon>0$, $x_0\in S(X)$, $x_n\xrightarrow{w}x$, $\|x\|<1-\epsilon$. 取 $f_0\in S(X^*)$, 使得 $f_0(x_0)=\|x_0\|=1$. 则由 $x_n\xrightarrow{w}x$ 知: $f_0(x_n)\to f_0(x)\ (n\to\infty)$. 而 $1-\epsilon>\|x\|\geq f_0(x)$. 故存在 N, 当 $n>N$ 时有

$$|f_0(x_n)|-|f_0(x)|\leq|f_0(x_n)-f_0(x)|<\frac{\epsilon}{2},$$

即

$$|f_0(x_n)|<|f_0(x)|+\frac{\epsilon}{2}\leq\|x\|+\frac{\epsilon}{2}<(1-\epsilon)+\frac{\epsilon}{2}=1-\frac{\epsilon}{2}.$$

因此,

$$|f_0(x_0-x_{N+1})|\geq|f_0(x_0)|-|f_0(x_{N+1})|>1-(1-\frac{\epsilon}{2})=\frac{\epsilon}{2}.$$

于是由 WLUR 空间定义[3]知: 对上述 ϵ, $x_0\in S(X)$, $f_0\in S(X^*)$, 存在 $\delta(\frac{\epsilon}{2},x_0,f_0)=\delta\in(0,1)$, 使得 $\|\frac{1}{2}(x_0+x_{N+1})\|<1-\delta$ 成立.

所以, 对任意 $k\geq 2$, $(X,\|\cdot\|)$ 具有 LWZ_k 性质.

因此, $(l^2,\|\cdot\|_w)$ 有 LWZ_k 性质 $(k\geq 2)$, 但没有 (H) 性质. 从而由文[6]的定理 10 可知, 对任意 $k\geq 2$, $k\in\mathbf{N}$, $(l^2,\|\cdot\|_w)$ 不是 LK-NUC 空间.

衷心感谢王慕三教授与王建华教授对作者多年来的指导与帮助.

参 考 文 献

[1] R. Huff, *Rocky montain*, J. Math., 10: 4(1980), 743-749.
[2] 俞鑫泰, 科学通报, 24(1983), 1473—1475.
[3] 俞金泰, Banach 空间几何理论, 华东师范大学出版社, 1986.
[4] D. Kutzarova, *k-β and k-nearly uniformly convex Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., 162(1991), 322-338.
[5] B. B. Panda and O. P. Kapoor, *A generalization of local uniform convexity of the norm*, J. Math. Anal. Appl., 52(1975), 300-308.
[6] B. L. Lin and W. Y. Zhang, *Some geometric properties related to uniform convexity of Banach spaces*, Function Spaces, Proc. Conf., Edwardsville/IL (U. S. A) (1990), Lect. Notes Pure Appl. Math., 136(1992), 281-293.
[7] J. R. Partinton, *On the Banach-Saks property*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 82(1977), 369-374.
[8] M. A. Smith, *Some example concerning rotundity in Banach spaces*, Math. Ann., 233(1978), 155-161.

The Weak Local Z_k-Property of Banach Spaces

He Zongxiang Li Qingde

(Dept. of Math., Anhui Normal University, Wuhu 241000)

Abstract

In this paper we introduce the weak local Z_k-property and the weak Z_k-property. With these concepts we give a characterization that a Banach space is K-NUC space. We also obtain a sufficient condition for a Banach space to be a LK-NUC space. We prove that weak Z_k-property implies weak Banach-Saks property.

Keywords local K-nearly uniformly conex, K-nearly uniformly convex, weak local Z_k-property, weak Z_k-property, weak Banach-Saks property.