第16卷第4期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 4
1996年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1996

模自同态环的理想格与正规根*

王俊民　　彭联刚
(云南大学数学系, 昆明650091)

摘　要　设 ${}_RP$ 是环 R 上的左模. 记 $P^* = \mathrm{Hom}_R(P, R)$, $J = PP^*$, $S_0 = P^*P$. 本文讨论了 J 与 S_0 的双零化理想格之间的关系, 以及 R, J, S_0 和 $\mathrm{End}_R P$ 的正规根之间的关系.

关键词　模自同态环, 双零化理想, 正规根
分类号　AMS(1991) 16D, 16N/CCL O153.3

§1　引　言

本文中的环均指结合环, 未必有单位元.

约定: R 表环, P 表左 R-模, $S = \mathrm{End}_R P$. 将 S 对 P 的作用写在右边, 此时 P 自然可视为双侧 (R, S) 模. 记 $P^* = \mathrm{Hom}_R(P, R)$, P^* 也可按自然方式作成 (S, R) 模. 对任意 $x, y \in P$ 和 $f \in P^*$, 定义 $y(fx) = (yf)x$, 则 $fx \in S$. 记

$$J = PP^* = \{\sum xf \text{ (有限和)} \mid x \in P, f \in P^*\};$$
$$S_0 = P^*P = \{\sum fx \text{ (有限和)} \mid f \in P^*, x \in P\},$$

易知 J 和 S_0 分别是 R 和 S 的理想. 因为对任意 $x, y \in P$, $f, g \in P^*$, $r \in R$, $s \in S$, 有 $(xf)y = x(fy)$, $(fx)g = f(xg)$, $(fr)x = f(rx)$ 和 $(xs)f = x(sf)$. 故可分别将它们记为 xfy, fxg, frx 和 xsf.

本文进一步推广[4]的结果, 得到更一般的结论: 当 $J^2 = J$ 和 $S_0^2 = S_0$ 时, J 的双零化理想格与 S_0 的双零化理想格之间存在互逆的格同构, 并且这个同构把 J 的常见根(如Baer根, Levitzki根, Jacobson根) 对应到 S_0 的相应的根.

§2　主要结果及证明

定理1　设

$$\mathbf{A}_1 = \{I \mid I \text{ 是 } R \text{ 的理想}, JIJ = I\};$$
$$\mathbf{J}_1 = \{K \mid K \text{ 是 } S \text{ 的理想}, S_0KS_0 = K\}.$$

定义 $\Phi_1(I) = P^*IP$, $\Gamma_1(K) = PKP^*$, 则 Φ_1 和 Γ_1 是 $\mathbf{A}_1$ 和 $\mathbf{J}_1$ 之间的互逆格同构.

* 1993年12月24日收到

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

证明 任取 $I \in \mathbf{A}_1$, 有

$$S_0\Phi_1(I)S_0 = P^*PP^*IPP^*P = P^*JIJP = P^*IP = \Phi_1(I),$$

即知 $\Phi_1(I) \in \mathbf{J}_1$, 故 Φ_1 是 $\mathbf{A}_1$ 到 $\mathbf{J}_1$ 的映射. 显然是保序的. 同样可验证 Γ_1 是 $\mathbf{J}_1$ 到 $\mathbf{A}_1$ 的保序映射. 任取 $I \in \mathbf{A}_1$, 有 $\Gamma_1\Phi_1(I) = PP^*IPP^* = JIJ = I$. 类似地, 任取 $K \in \mathbf{J}_1$, 有 $\Phi_1\Gamma_1(K) = K$. 故 Φ_1 和 Γ_1 是互逆格同构.

定义 1 称 J 的理想 A 是双零化理想, 如果存在 R 的含于 J 的理想 I, 使得 $A = \{a \in J \mid (I + JaJ)/I = 0\}$. 记为 $A = \mathrm{Bann}_J(J/I)$. 类似地定义 S_0 的双零化理想 T 为: $T = \mathrm{Bann}_{S_0}(S_0/K) = \{t \in S_0 \mid (K + S_0tS_0)/K = 0\}$, 其中 K 是 S 的某个含于 S_0 的理想.

令 $\mathbf{A} = \{\mathrm{Bann}_J(J/I) \mid I$ 是 R 的含于 J 的理想$\}$, $\mathbf{J} = \{\mathrm{Bann}_{S_0}(S_0/K) \mid K$ 是 S 的含于 S_0 的理想$\}$. 即 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{J}$ 分别是 J 和 S_0 的全体双零化理想. 定义

$$\Phi: \mathbf{A} \quad A \to \mathrm{Bann}_{S_0}(S_0/P^*JAJP) \in \mathbf{J};$$

$$\Gamma: \mathbf{J} \quad T \to \mathrm{Bann}_J(J/PS_0TS_0P^*) \in \mathbf{A}.$$

引理 1 设 $J^2 = J$, $S_0^2 = S_0$, 令 $\Phi_2: \mathbf{A} \quad A \to JAJ \in \mathbf{A}$, $\Gamma_2: \mathbf{A}_1 \quad I \to \mathrm{Bann}_J(J/I) \in \mathbf{A}$, $\Phi_3: \mathbf{J} \quad T \to S_0TS_0 \in \mathbf{J}_1$, $\Gamma_3: \mathbf{J}_1 \quad K \to \mathrm{Bann}_{S_0}(S_0/K) \in \mathbf{J}$. 则 Φ_2, Γ_2 和 Φ_3, Γ_3 分别是 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}_1$ 之间和 $\mathbf{J}$ 与 $\mathbf{J}_1$ 之间的互逆格同构.

证明 由 $J^2 = J$ 知 Φ_2 是 $\mathbf{A}$ 到 $\mathbf{A}_1$ 的映射. 显然 Φ_2 和 Γ_2 都是保序的. 对任意 $A \in \mathbf{A}$, 有 $\Gamma_2\Phi_2(A) = \mathrm{Bann}_J(J/JAJ)$, 显然 $A \subseteq \Gamma_2\Phi_2(A)$. 又 $A = \mathrm{Bann}_J(J/I)$, 于是 $J(\Gamma_2\Phi_2(A))J \subseteq JAJ \subseteq J$, 故 $\Gamma_2\Phi_2(A) \subseteq A$, 从而 $\Gamma_2\Phi_2(A) = A$. 另一方面, 任取 $I \in \mathbf{A}_1$, 有 $\Phi_2\Gamma_2(I) = J\mathrm{Bann}_J(J/I)J \subseteq I$, 但 $I = JIJ \subseteq J\mathrm{Bann}_J(J/I)J$, 即 $I \subseteq \Phi_2\Gamma_2(I)$, 故 $\Phi_2\Gamma_2(I) = I$. 所以 Φ_2 和 Γ_2 是 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}_1$ 之间的互逆格同构. 类似可证 Φ_3 和 Γ_3 是 $\mathbf{J}$ 与 $\mathbf{J}_1$ 之间的互逆格同构.

由定理 1 和引理 1 立即可得到 J 与 S_0 之间的双零化理想格同构的定理.

定理 2 设 $J^2 = J$, $S_0^2 = S_0$, 那么 Φ 和 Γ 定义了 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{J}$ 之间的互逆格同构.

定义 2 设 α 是 Amitsur-Kurosh 意义下的根性质, 称 α 是正规的, 如果对每个 Morita Context (R_1, M, N, R_2) 均有 $N\alpha(R_1)M \subseteq \alpha(R_2)$.

若 α 是超幂零根, 则 α 是正规根当且仅当 α 是遗传根和强根[1]. 这里强根是指每个 α- 半单环的任意非零单侧理想都不是 α- 根环. 可见 Baer 根, Levitzki 根和 Jacobson 根都是正规根.

以下约定, α 表示 Amitsur-Kurosh 意义下的根性质, α 是正规根, 且满足条件: 对任一环 A, $\alpha(A)$ 是 A 的某些素理想的交或者是 A 本身. 于是, α 以 Baer 根, Levitzki 根和 Jacobson 根为特殊情形.

引理 2 $\alpha(J)$ 和 $\alpha(S_0)$ 都是双零化理想.

证明 若 $\alpha(J) = J$, 显然是双零化理想. 若 $\alpha(J) \neq J$, 则 $\alpha(J) = \cap I_i$, 其中每个 I_i 是 J 的素理想. 但对 $x \in J$, $JXJ \subseteq I_i$ 当且仅当 $x \in I_i$. 故 $\alpha(J) = \mathrm{Bann}_J(J/\alpha(J))$, 即 $\alpha(J)$ 是双零化理想.

类似可证 $\alpha(S_0)$ 是双零化理想.

定理 3 设 $J^2 = J$, $S_0^2 = S_0$, 则 $\Phi(\alpha(J)) = \alpha(S_0)$, $\Gamma(\alpha(S_0)) = \alpha(J)$.

证明 由引理 2 知 $\Phi(\alpha(J))$ 和 $\Gamma(\alpha(S_0))$ 均有意义. 注意到 (J, P, P^*, S_0) 自然成为一个 Morita Context, 于是, $P^*\alpha(J)P \subseteq \alpha(S_0)$, $P\alpha(S_0)P^* \subseteq \alpha(J)$. 从而

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$S_0\Phi(\alpha(J))S_0 = S_0(\mathrm{Bann}_{S_0}(S_0/P^*J\alpha(J)JP))S_0 \subseteq P^*\alpha(J)P \subseteq \alpha(S_0).$$

由引理 2 的证明可知 $\Phi(\alpha(J)) \subseteq \alpha(S_0)$. 类似地, 可得 $\Gamma(\alpha(S_0)) \subseteq \alpha(J)$. 但 Φ 和 Γ 是互逆格同构, 因此得 $\Phi(\alpha(J)) = \alpha(S_0)$ 和 $\Gamma(\alpha(S_0)) = \alpha(J)$.

命题 1 下列命题成立:

(1) 设 $JP = P$, 那么 $\mathrm{Gen}_R P = \mathrm{Gen}_R J$, 且对任一左 R-模 M, 若 $JM = M$, 则 $M \in \mathrm{Gen}_R P$.

(1′) 设 $PS_0 = P$, 那么 $\mathrm{Gen}P_S = \mathrm{Gen}(S_0)_S$, 且对任一右 S-模 N, 若 $NS_0 = N$, 则 $N \in \mathrm{Gen}P_S$.

(2) $JP = P$ 且 ${}_RP$ 是自生成元的充要条件是 J 关于 $\mathrm{End}P_S$ 在 P 上作用稠密. 即对 P 中任意有限个元 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 和 $\mathrm{End}P_S$ 中任意元 f, 存在 J 中元 j, 使得 $jp_i = fp_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

(2′) $PS_0 = P$ 且 P_S 是自生成元的充要条件是 S_0 关于 S 在 P 上作用稠密.

(3) 如果 J 关于 $\mathrm{End}P_S$ 在 P 上作用稠密, 那么对任意 $M \in \mathrm{Gen}_R P$, 有 $JM = M$. 特别地, 对 R 的任一含于 J 的左理想 I, 有 $JI = I$.

(3′) 如果 S_0 关于 S 在 P 上作用稠密, 那么对任意 $N \in \mathrm{Gen}P_S$, 有 $NS_0 = N$. 特别地, 对 S 的任一含于 S_0 的右理想 K, 有 $KS_0 = K$.

证明 (1) 任取 $p \in P$, $f \in P^*$, 定义

$$\varphi: P \quad x \to xf \in PP^* = J.$$

显然 $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(P, J)$ 且 $p\varphi = pf$. 于是 $J \subseteq P\mathrm{Hom}_R(P, J)$, 从而 $J \in \mathrm{Gen}_R P$. 另一方面, 任取 $p \in P$, 显然 J 到 Jp 有一个 R-满同态, 因此 $P = JP \in \mathrm{Gen}_R J$. 于是 $\mathrm{Gen}_R P = \mathrm{Gen}_R J$.

若 R-模 ${}_RM$ 满足 $JM = M$, 类似可证 $M = JM \in \mathrm{Gen}_R J = \mathrm{Gen}_R P$.

(2) 充分性 由稠密性可得 $JP = P$. 又设 N 是 ${}_RP$ 的任一子模, 任取 $p \in N$, 又由稠密性知存在 $j = \sum p_i f_i$ (有限和), 其中 $p_i \in P$, $f_i \in P^*$, 使得 $p = jp = \sum p_i f_i p$. 取定其中任一 i, 定义

$$\varphi_i: P \quad x \to xf_i p \in N.$$

显然 $\varphi_i \in \mathrm{Hom}_R(P, N)$ 且 $p_i\varphi_i = p_i f_i p$. 故 $p_i f_i p \in P\mathrm{Hom}_R(P, N)$. 于是 $p \in P\mathrm{Hom}_R(P, N)$, 从而 $N \subseteq P\mathrm{Hom}_R(P, N)$. 这说明 $N \in \mathrm{Gen}_R P$. 因此 ${}_RP$ 是自生成元

必要性 由 $JP = P$ 易知, 对任意 $M \in \mathrm{Gen}_R P$, 有 $JM = M$. 将 R 按自然方式扩充成一个有单位元的环 R_1. 由 ${}_RP$ 自生成知, 任意有限直和 ${}_RP^{(n)}$ 的任一子模 $\in \mathrm{Gen}_R P$, 特别地, 任意取 $p_1, p_2, \cdots, p_n \in P$, 有 $R_1(p_1, p_2, \cdots, p_n) \in \mathrm{Gen}_R P$. 从而 $R_1(p_1, p_2, \cdots, p_n) = JR_1(p_1, p_2, \cdots, p_n) = J(p_1, p_2, \cdots, p_n)$. 另一方面, 由 $R_1(p_1, p_2, \cdots, p_n) \in \mathrm{Gen}_R P$ 知, 存在某个直和 ${}_RP^{(m)}$ 到 $R_1(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 的 R-满同态 φ 不妨设 m 是大于 n 的自然数, 则 φ 可视为 $\mathrm{End}_R P^{(m)}$ 中的元素. 任取 ${}_RP^{(m)}$ 的二次自同态环 $\mathrm{Biend}_R P^{(m)}$ 中元 f, 有 $fR_1(p_1, p_2, \cdots, p_n) = f(p^{(m)}\varphi) = (fp^{(m)})\varphi \subseteq R_1(p_1, p_2, \cdots, p_n)$. 由此知 $R_1(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 成为 $\mathrm{Biend}_R P^{(m)}$-模. 由[2]4.3 引理 2 知 $\mathrm{End}P_S$ 可视为 $\mathrm{Biend}_R P^{(m)}P$ 的子环. 从而

$$(\mathrm{End}P_S)R_1(p_1, p_2, \cdots, p_n) = R_1(p_1, p_2, \cdots, p_n) = J(p_1, p_2, \cdots, p_n).$$

于是 $(\mathrm{End}P_S)(p_1, p_2, \cdots, p_n) = J(p_1, p_2, \cdots, p_n)$. 此即说明 J 关于 $\mathrm{End}P_s$ 在 ${}_RP$ 上作用稠密.

(3) 由(1) 和(2) 易得.

(1′), (2′) 和(3′) 类似可证.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

推论 1 设 ${}_RP$ 是投射模且是自生成元, 则 J 关于 $\mathrm{End}P_S$ 在 P 上作用稠密.

推论 1′ 设 ${}_RP$ 是投射模且是自生成元, 则 S_0 关于 S 在 P 上作用稠密.

证明 因为 ${}_RP$ 是投射模, 由[3]知 S_0 关于 S 在 P 上作用稠密. 这就得到推论 1.′ 于是也得到 $P = PS_0 = JP$. 但 ${}_RP$ 是自生成元, 故 J 关于 $\mathrm{End}P_S$ 在 P 上作用稠密. 这就是推论 1.

据[4], 称 J 的理想 A 是零化理想, 如果存在 R 的含于 J 的理想 I, 使得 A 是左 R-模 J/I 在 J 中的零化子. 类似地定义, 称 S_0 的理想 T 是零化理想, 如果存在 S 的含于 S_0 的理想 K, 使得 T 是右 S-模 S_0/K 在 S_0 中的零化子.

定理 4 设 J 和 S_0 分别关于 $\mathrm{End}P_S$ 和 S 在 P 上作用稠密. 特别地, ${}_RP$ 是投射模和自生成元. 那么下列命题成立:

(一) I 是 J 的零化理想当且仅当 I 是 J 的双零化理想. K 是 S_0 的零化理想当且仅当 K 是 S_0 的双零化理想. 于是 Φ 和 Γ 也是 J 与 S_0 的零化理想之间的互逆格同构, 且 $\Phi(\alpha(J)) = \alpha(S_0)$, $\Gamma(\alpha(S_0)) = \alpha(J)$.

(二) 如果 ${}_RP$ 是忠实的, 那么下列几条等价:

(1) R 是 α-半单环(素环, 左本原环). (2) J 是 α-半单环(素环, 左本原环).

(3) S_0 是 α-半单环(素环, 左本原环). (4) S 是 α-半单环(素环, 左本原环).

证明 (一) 由命题 1 知, 对 R 的任一含于 J 的理想 A 均有 $JA = A$. 同样, 对 S 的任一含于 S_0 的理想 T 均有 $TS_0 = T$. 于是易知(一)为真.

(二) α-半单性:

(1) $\Rightarrow$ (2) 显然.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\alpha(S_0) = \Phi(0) = \mathrm{Bann}_{S_0}(S_0)$. 故 $S_0\alpha(S_0) = S_0\alpha(S_0)S_0 = 0$, 因此 $P\alpha(S_0) = PS_0\alpha(S_0) = 0$, 但 P_S 忠实, 于是 $\alpha(S_0) = 0$.

(3) $\Rightarrow$ (4) 由 $\alpha(S) \cap S_0 = \alpha(S_0) = 0$ 知 $S_0\alpha(S) = 0$, 于是 $P\alpha(S) = PS_0\alpha(S) = 0$. 由 P_S 忠实知 $\alpha(S) = 0$.

类似可得 (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1).

素性: (1) $\Leftrightarrow$ (2) 和 (3) $\Leftrightarrow$ (4) 易得.

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 T 和 K 是 S_0 的理想, 且 $TK = 0$. 则 $(PTP^*)(PKP^*) = PTS_0KP^* \subseteq PTKP^* = 0$. 于是 $PTP^* = 0$ 或 $PKP^* = 0$, 从而 $S_0T = S_0TS_0 = 0$ 或 $S_0K = S_0KS_0 = 0$. 类似于上面的证明可得 $T = 0$ 或 $K = 0$. 即 S_0 也是素环.

(3) $\Rightarrow$ (2) 仿 (2) $\Rightarrow$ (3) 的证明可得.

左本原性: (1) $\Leftrightarrow$ (2) 和 (3) $\Leftrightarrow$ (4) 仿[4]中证明可得.

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 M 是 J 上忠实单纯左模. 任取 $m \in M$ 和 $f \in P^*$, 定义 $\varphi: P \to p \to (pf)m \in M$. 易知 φ 是 J-模同态. 记 $fm = \varphi$ 则 $P^*M = \{\sum fm$ (有限和) $| f \in P^*, m \in M\}$ 是左 S-模 $\mathrm{Hom}_J(P, M)$ 的子模, 并且 $P^*M \neq 0$, 若不然, 则由 $P^*M = 0$ 得 $JM = P(P^*M) = 0$, 这不可能. 下面证明 P^*M 是 S_0 上忠实单纯左模. 设 T 是 S_0 的理想, 且 $TP^*M = 0$, 则 $(PTP^*)M = 0$. 故 $PTP^* = 0$. 于是 $S_0T = S_0TS_0 = 0$. 由此易知 $T = 0$. 这说明 P^*M 是忠实的 S_0-左模. 又设 m 是 M 的非零元, 则 $M = Jm$. 从而 $P^*M = P^*Jm = P^*m$. 设 Nm 是 P^*m 的任一非零左 S_0-模, 其中 N 是 ${}_{S_0}P^*$ 的子模, 于是 $PNm \neq 0$, 从而 $PNm = M$. 因此有 $P^*M = S_0Nm = Nm$.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

这说明 P^*M 是单纯的左 S_0-模. 至此已证明了 S_0 是左本原环.

(3) ⇒ (2)　仿 (2) ⇒ (3) 的证明可得.

定义 3　设 A 和 B 是环, M 既是左 A-模又是左 B-模. 称 $N \in \mathrm{Gen}_B M$ 可由 M 自然地定义为左 A-模, 如果存在直和 ${}_BM^{(I)}$ 和它到 N 的 B-同态满射 φ, 使得对任意 $a \in A$, $m \in M^{(I)}$, $\varphi(am)$ 由 $\varphi(m)$ 唯一确定, 即若 $\varphi(m) = \varphi(m_1)$, 则 $\varphi(am) = \varphi(am_1)$. 此时定义 $a\varphi(m) = \varphi(am)$.

按上面的定义, N 显然成为 A-模. 且对任意直和 ${}_BM^{(I_1)}$ 和它到 N 的任意 B-同态满射 φ, 均可按上述方式将 N 定义成 A-模, 且对任意 $x \in M^{(I_1)}$. 若 $\varphi(m) = \varphi(x)$, 则 $\varphi(am) = \varphi(ax)$. 即上述定义与直和 ${}_BM^{(I)}$ 以及它到 N 的 B-同态满射的选择无关.

引理 3　设 A 和 B 是环, U 既是左 A-模又是左 B-模. 如果 B 关于 A 在 U 上作用稠密, 即对任意有限个 $u_1, u_2, \cdots, u_n \in U$ 和任意 $a \in A$, 存在 $b \in B$, 使得 $bu_i = au_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 那么有

(1)　对任意 $M, N \in \mathrm{Gen}_B U$, M 可由 U 自然地定义为左 A-模.

(2)　对任意 $M, N \in \mathrm{Gen}_B U$ 和 $f \in \mathrm{Hom}_B(M, N)$, 将 M 和 N 由 U 自然地定义为左 A-模之后, f 可视为 M 到 N 的 A-同态.

证明　(1) 设有 B-同态满射 $\varphi({}_BU^{(I)}) = M$, 其中 ${}_BU^{(I)}$ 是某个直和, 记为 X. 对任意 $a \in A$ 和 $x_1, x_2 \in X$, 如果 $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, 因为存在 $b \in B$, 使得 $bx_1 = ax_1$, $bx_2 = ax_2$, 所以 $\varphi(ax_1) = \varphi(bx_1) = b\varphi(x_1) = b\varphi(x_2) = \varphi(bx_2) = \varphi(ax_2)$. 故定义 $a\varphi(x_1) = \varphi(ax_1)$ 有意义. 此时 M 成为左 A-模. 类似可证上述定义与 ${}_BU^{(I)}$ 和 φ 的选择无关.

(2)　设有一直和 ${}_BU^{(I)}$, 它到 ${}_BM$ 和 ${}_BN$ 分别有满同态 φ 和 ψ. 对任意 $m \in M$, $a \in A$, 存在 $x \in U^{(I)}$, $y \in U^{(I)}$, 使得 $\varphi(x) = m$, $\psi(y) = f(m)$. 由稠密性知存在 $b \in B$, 使得 $bx = ax$, $by = ay$. 于是 $f(am) = f(\varphi(ax)) = bf(m) = b\psi(y) = \psi(ay) = a\psi(y) = af(m)$. 故 f 也可视为 A-同态.

命题 2　设 J 关于 $\mathrm{End}P_S$ 在 P 上作用稠密. 那么下列几条等价:

(1)　$S_0 = S$.　(2)　P_S 是生成元　(3)　${}_{\mathrm{End}P_S}P$ 是有限生成投射模

(4)　$JP = P$ 有有限张成集, 且 ${}_JP$ 是拟投射模

(5)　$RP = P$ 有有限张成集, 且 ${}_RP$ 是拟投射模

(6)　$RP = P$ 有有限张成集, 且 ${}_RP$ 是投射模

证明　(1) ⇒ (2)　由命题 1 可得.

(2) ⇒ (3)　见 [5] 中引理 17.7.

(3) ⇒ (1)　由投射模对偶基原理易得.

(3) ⇒ (4)　由 J 关于 $\mathrm{End}P_S$ 在 P 上作用稠密知 $JP = P$ 有有限张成集. 设 φ 是 P 到 J-模 N 的 J-模同态满射. 任取 $f \in \mathrm{Hom}_J(P, N)$, 由引理 3 知 N 可由 P 自然地定义为左 $\mathrm{End}P_S$-模, 且 φ 和 f 都可视为 $\mathrm{End}P_S$-同态. 由 ${}_{\mathrm{End}P_S}P$ 的投射性知存在 P 到自身的 $\mathrm{End}P_S$-同态 g, 使得 $g\varphi = f$. 显然 g 也是 J-同态, 并且作为 J-同态也有 $g\varphi = f$. 故 ${}_JP$ 是似投射模.

(4) ⇒ (3)　易知 P 是有限生成 $\mathrm{End}P_S$-模. 设 M 和 N 是 $\mathrm{End}P_S$-模, 且 M 到 N 有一个 $\mathrm{End}P_S$-同态满射 φ. M 和 N 可自然地视为 J-模. 任取 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{End}P_S}(P, N)$, φ 和 f 也可自然地视为 J-同态. 但 $JP = P$, 故 f 和 φ 可分别视为 P 到 JN 和 JM 到 JN 的 J-同态. 因为 $JP =$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

P 有有限张成集且是拟投射模, 故仿[5] 命题 16. 12 的证明, 可得 $_JP$ 关于 Gen_JP 是投射的. 由命题 1 知 JM, $JN \in \mathrm{Gen}_JP$. 从而存在 P 到 JM 的 J-同态 g, 使得 $g\varphi = f$. 由引理 3, g 可视为 $\mathrm{End}P_S$-同态. 易知, 作为 $\mathrm{End}P_S$-同态仍有 $g\varphi = f$. 因此, P 是投射 $\mathrm{End}P_S$-模.

(4) ⇔(5) 和(4) ⇔(6) 仿(3) ⇔(4) 的证明可得.

由上述各命题和定理, 立即得到较[4] 中结论更精细的

推论 2 设 $_RP$ 是忠实模, 且 $JP = P$. 如果 $_RP$ 是拟投射生成元, 即 $_RP$ 是拟投射模也是自生成元, 且 $RP = P$ 有有限张成集. 那么有

(1) Φ 和 Γ 是 J 的零化理想与 S 的理想之间的互逆格同构. 且 $\Phi(\alpha(J)) = \alpha(S)$, $\Gamma(\alpha(S)) = \alpha(J)$.

(2) 若 R, J 和 S 中有一个是 α-半单环(素环, 左本原环), 则其余两个也是 α-半单环(素环, 左本原环).

参 考 文 献

[1] M. Jaegermann, *Morita context and radical*, Bull Aced Polon Sci, 20(1972), 619-623.

[2] N. Jacobson, *Basic Algebra* Ⅱ, W. H. Freeman and Company, 1980.

[3] B. R. MacDonald, *Endomorphism rings of infinitely generated projective modules*, J. Algebra, 45 (1977), 69-82.

[4] 姚慕生, 拟投射生成元自同态环的理想格, 数学年刊, 8A: 1(1987), 9-17.

[5] F. W. Anderson and K. R, Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York/Heidelberg/Berlin, 1974.

Lattice of Ideals and Normal Radicals of Endomorphism Rings of Modules

Wang Junmin *Pen Liangang*

(Dept. of Math., Yunnan University)

Abstract

Let $_RP$ be a left R-module and P^* the dual module. In this paper, we obtain that there exists an isomorphism between lattices of bi-annihilator ideals of PP^* and P^*P, and in this isomorphism, normal radicals correspond to normal radicals.

Keywords endomorphism rings of modules, bi-annihilator ideal, normal radical.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.