第16卷第4期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 4
1996年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1996

算术图一个猜想的证明*

喻 平
(广西师范大学数学系, 桂林541004)

摘 要 Acharya 和 Hedge 提出猜想[1]: (i) 若圈 C_{4t+1} ($t \geq 1$, $t \in N$) 是 (k, d)-算术图, 则 $k = 2dt + 2r$ ($r \geq 0$, $r \in N$); (ii) 若圈 C_{4t+3} 是 (k, d)-算术图, 则 $k = (2t+1)d + 2r$ ($r \geq 0$, $r \in N$). 本文证明了上述猜想为真

关键词 算术图, 圈, 猜想

分类号 AMS(1991) 05C78/CCL O157.5

1 引 言

本文讨论的图均为简单图, 所用的图论术语和符号同于[2].

一个 (p, q)- 图 G 被称为 (k, d)- 算术的, 如果它的不同顶点可以标号不同的非负整数, 使所有边值组成算术级数 $k, k+d, k+2d, \cdots, k+(q-1)d$, 其中边值是该边两端点的标号和. 即对于一个给定图 $G=(V, E)$, 定义 $V(G)$ 到非负整数集 Z^+ 的映射 $f: V(G) \to Z^+$, 定义它的导出边函数 $f^*: f^*(uv) = f(u) + f(v)$, $\forall uv \in E(G)$. 对一个 (p, q)- 图 $G=(V, E)$ 和两个正整数 k, d, 如果 $\exists f^*$, 使

$$f^*(G) = \{f^*(uv): uv \in E(G)\} = \{k, k+d, k+2d, \cdots, k+(q-1)d\},$$

则称 G 是 (k, d)- 算术的. 若存在两个正整数 k, d 使 G 是 (k, d)- 算术的, 则称 G 为 (k, d)- 算术图.

Acharya 和 Hedge 在文[1]中证明了: 对任意的非负整数 r, 圈 C_{4t+1} ($t \geq 1$, $t \in N$) 是 $(2dt+2r, d)$- 算术图; 对任意的非负整数 r, C_{4t+3} ($t \geq 1$, $t \in N$) 是 $((2t+1)d+2r, d)$- 算术图. 并提出猜想: (i) 若 C_{4t+1} 是 (k, d)- 算术图, 则 $k = 2dt + 2r$ ($r \geq 0$, $r \in N$); (ii) 若 C_{4t+3} 是 (k, d)- 算术图, 则 $k = (2t+1)d + 2r$ ($r \geq 0$, $r \in N$). 本文证明该猜想是正确的.

2 定理的证明

引理 1[1] 设 $G=(V, E)$ 是一个欧拉图, 若 G 是 (k, d)- 算术图, 则 $q(2k+(q-1)d) \equiv 0 \pmod 4$, 其中 $q = |E|$.

引理 2[1] 若一个欧拉图 G 满足 $q \equiv 3 \pmod 4$, 且 G 是 (k, d)- 算术图, 则 $d \equiv 0 \pmod 2$.

* 1994年1月12日收到

引理 3 若圈 $C_{4t+1}(t \geq 1, t \in N)$ 是 (k, d)-算术图, 则 $k \equiv 0 \pmod 2$.

证明 因为 C_{4t+1} 是 (k, d)-算术图, 且 C_{4t+1} 又是欧拉图, 所以由引理 1 得

$$(4t+1)(2k+4td) \equiv 0 \pmod 4,$$

而 $(4t+1, 4) = 1$, 因此 $(2k+4td) \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow 2 \mid k$, 即 $k \equiv 0 \pmod 2$.

引理 4 若圈 $C_{4t+3}(t \geq 1, t \in N)$ 是 (k, d)-算术图, 则 $k - (2t+1)d \equiv 0 \pmod 2$.

证明 因圈 C_{4t+3} 是 (k, d)-算术图, 且 C_{4t+3} 是欧拉图, 所以由引理 1 得

$$(4t+3)(2k+(4t+2)d) \equiv 0 \pmod 4,$$

而 $(4t+3, 4) = 1$, 所以 $(2k+(4t+2)d) \equiv 0 \pmod 4$. 又因 $4t+3 \equiv 3 \pmod 4$, 由引理 2 可知 $d \equiv 0 \pmod 2$, 故 $4 \mid 2k \Rightarrow 2 \mid k \Rightarrow k-(2t+1)d \equiv 0 \pmod 2$.

定理 1 如果圈 $C_{4t+1}(t \geq 1, t \in N)$ 是 (k, d)-算术图, 则 $k = 2dt + 2r(r \geq 0, r \in N)$.

证明 $C_{4t+1} = (u_1, u_2, \cdots, u_{4t+1}, u_1)$ 的顶点标号依次为 $a_1, a_2, \cdots, a_{4t+1}$, 即 $f(u_i) = a_i(i = 1, 2, \cdots, 4t+1)$. 因为 C_{4t+1} 是 (k, d)-算术图, 故必有一条边值为 k, 不妨设 $f^*(u_1u_{4t+1}) = k$. 于是有如下方程组

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = k + t_1d, \\ a_2 + a_3 = k + t_2d, \\ a_3 + a_4 = k + t_3d, \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ a_{4t} + a_{4t+1} = k + t_{4t}d, \\ a_1 + a_{4t+1} = k, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $1 \leq t_i \leq 4t, t_i \in N\ (i = 1, 2, \cdots, 4t)$, 且 $\sum_{i=1}^{4t} t_i = 1 + 2 + 3 + \cdots + 4t = 2t(1+4t)$.

解方程组(1), 得

$$a_i = \frac{k}{2} + \frac{d}{2}[2t(1+4t) - 2r_i]\ (i = 1, 2, 3, \cdots, 4t+1),$$

其中

$$r_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\frac{i-1}{2}} t_{2j-1} + \sum_{j=\frac{i+1}{2}}^{2t} t_{2j}, & i \text{ 是奇数}, \\ \sum_{j=1}^{\frac{i-2}{2}} t_{2j} + \sum_{j=\frac{i}{2}}^{2t-1} t_{2j+1}, & i \text{ 是偶数}, \end{cases} \tag{2}$$

$(i = 1, 2, 3, \cdots, 4t+1)$.

现证明 C_{4t+1} 的标号 $a_1, a_2, \cdots, a_{4t+1}$ 中, 其最小标号不大于 $\frac{k}{2} - dt$, 即

$$\min\{a_1, a_2, \cdots, a_{4t+1}\} \leq \frac{k}{2} - dt.$$

为此, 考察 $b_i = 2t(1+4t) - 2r_i(i = 1, 2, \cdots, 4t+1)$, 显然 $b_i \equiv 0 \pmod 2$.

当 $t = 1$ 时, 注意到

$$a_1 = \frac{k}{2} + \frac{d}{2}b_1, \quad a_5 = \frac{k}{2} + \frac{d}{2}b_5,$$

而 $a_1 + a_5 = k$, 故必有 $b_1 + b_5 = 0$, 因此必有 $b_1 \leq -2$ 或 $b_5 \leq -2 \Rightarrow a_1 \leq \frac{k}{2} - d$ 或 $a_5 \leq \frac{k}{2} - d \Rightarrow \min\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \leq \frac{k}{2} - d$.

当 $t \geq 2$ 时, 若有 $b_1 \leq -2t$ 或 $b_{4t+1} \leq -2t$, 则

$$\min\{a_1, a_2, \cdots, a_{4t+1}\} \leq \min\{a_1, a_{4t+1}\} \leq \frac{k}{2} - td.$$

如果 $b_1 > -2t$(或 $b_{4t+1} > -2t$), 那么 $2t(1 + 4t) - 2r_1 > -2t \Rightarrow r_1 < 4t^2 + 2t$

考察$\{r_1, r_2, \cdots, r_{4t+1}\}$, 有 $r_1 < 4t^2 + 2t$, 假设 $\forall r_n \in \{r_1, r_2, \cdots, r_{4t+1}\}$, 均有 $r_n < 4t^2 + 2t$($n = 1, 2, \cdots, 4t+1$), 因为 $r_1, r_2, \cdots, r_{4t+1}$ 两两不等(否则, 若 $r_i = r_j$ ($i \neq j$), 则 $a_i = a_j$ 与 C_{4t+1} 是 (k, d)-算术图, 矛盾), 故可将其由小到大排序

$$r_{p1} < r_{p2} < r_{p3} < \cdots < r_{p(4t+1)} < 4t^2 + 2t,$$

而 $r_1, r_2, \cdots, r_{4t+1}$ 均为正整数, 故可得

$$\begin{aligned} & r_{p(4t+1)} < 4t^2 + 2t, \\ & r_{p(4t)} < 4t^2 + 2t - 1, \\ & r_{p(4t-1)} < 4t^2 + 2t - 2, \\ & \cdots\cdots \\ & r_{p1} < 4t^2 + 2t - 4t, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{4t+1} r_{pi} < (4t + 1)(4t^2 + 2t) - 2t(1 + 4t) = 16t^3 + 4t^2.$$

注意到 $\sum_{i=1}^{4t+1} r_{pi} = \sum_{i=1}^{4t+1} r_i$, 所以得

$$\sum_{i=1}^{4t+1} r_i < 16t^3 + 4t^2. \tag{3}$$

由(2) 可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{4t+1} r_i = & \sum_{j=1}^{2t} t_{2j} + \sum_{j=1}^{2t-1} t_{2j+1} + \left(\sum_{j=1}^{1} t_{2j-1} + \sum_{j=2}^{2t} t_{2j}\right) + \left(\sum_{j=1}^{1} t_{2j} + \sum_{j=2}^{2t-1} t_{2j+1}\right) + \left(\sum_{j=1}^{2} t_{2j-1} + \sum_{j=3}^{2t} t_{2j}\right) \\ & + \left(\sum_{j=1}^{2} t_{2j} + \sum_{j=3}^{2t-1} t_{2j+1}\right) + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{2t-1} t_{2j-1} + \sum_{j=2t}^{2t} t_{2j}\right) + \sum_{j=1}^{2t-1} t_{2j} + \sum_{j=1}^{2t} t_{2j-1} \\ = & 2tt_1 + 2tt_2 + \cdots + 2tt_{4t} = 2t\sum_{i=1}^{4t} t_i = 16t^3 + 4t^2, \end{aligned}$$

此与(3) 矛盾, 所以必 $\exists\, r_n \in \{r_1, r_2, \cdots, r_{4t+1}\}$, 使 $r_n \geq 4t^2 + 2t$ 因此

$$a_n = \frac{k}{2} + \frac{d}{2}[2t(1 + 4t) - 2r_n] \leq \frac{k}{2} + \frac{d}{2}(2t + 8t^2 - 8t^2 - 4t) = \frac{k}{2} - dt$$

由此即得$\min\{a_1, a_2, \cdots, a_{4t+1}\} \leq a_n \leq \frac{k}{2} - dt$, 而因$C_{4t+1}$是$(k, d)$-算术图, 所以$\min\{a_1, a_2, \cdots, a_{4t+1}\} \geq 0$. 故$\frac{k}{2} - dt \geq 0 \Rightarrow k \geq 2dt$

令 $k = 2dt + R$ ($R \geq 0, R \in N$), 由引理 3 知 $k \equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow k - 2dt \equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow k \equiv$

$0(\bmod 2)$, 故可取 $R = 2r(r \geq 0, r \in N)$, 由此即得

$$k = 2dt + 2r \ (r \geq 0, r \in N).$$

定理 1 得证

定理 2 如果圈 $C_{4t+3}(t \geq 1, t \in N)$ 是 (k, d)-算术图, 则 $k = (2t+1)d + 2r(r \geq 0, r \in N)$.

证明 设 $C_{4t+3} = (u_1, u_2, \cdots, u_{4t+3}, u_1)$ 的顶点标号依次为 $f(u_i) = a_i(i = 1, 2, \cdots, 4k+3)$, 再设(不失一般性) $f^*(u_1u_{4t+3}) = k$, 则

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = k + t_1d, \\ a_2 + a_3 = k + t_2d, \\ a_3 + a_4 = k + t_3d, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{4t+2} + a_{4t+3} = k + t_{4t+2}d, \\ a_1 + a_{4t+3} = k, \end{cases} \tag{4}$$

其中 $1 \leq t_i \leq 4t+2, t_i \in N\ (i = 1, 2, \cdots, 4t+2)$, 且 $\sum_{i=1}^{4t+2} t_i = 1 + 2 + 3 + \cdots + (4t+2) = (2t+1)(4t+3)$.

解(4) 得 $a_i = \frac{k}{2} + \frac{d}{2}[(2t+1)(4t+3) - 2r_i]$, 其中

$$r_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\frac{i-1}{2}} t_{2j-1} + \sum_{j=\frac{i+1}{2}}^{2t+1} t_{2j}, & i \text{ 为奇数}, \\ \sum_{j=1}^{\frac{i-2}{2}} t_{2j} + \sum_{j=\frac{i}{2}}^{2t} t_{2j+1}, & i \text{ 为偶数}, \end{cases}$$

$(i = 1, 2, 3, \cdots, 4t+3)$.

注意到

$$\sum_{i=1}^{4t+3} r_i = (2t+1)\sum_{i=1}^{4t+2} t_i = (2t+1)^2(4t+3).$$

若 $r_i < 4t^2 + 6t + 2(i = 1, 2, 3, \cdots, 4t+3)$, 则将 $r_1, r_2, \cdots, r_{4t+3}$ 由小到大排序后得

$$r_{p1} < r_{p2} < r_{p3} < \cdots < r_{p(4t+3)} < 4t^2 + 6t + 2,$$

又因 $r_i \in N\ (i = 1, 2, \cdots, 4t+3)$, 所以得

$$\begin{aligned} & r_{p(4t+3)} < 4t^2 + 6t + 2, \\ & r_{p(4t+2)} < 4t^2 + 6t + 2 - 1, \\ & r_{p(4t+1)} < 4t^2 + 6t + 2 - 2, \\ & \cdots\ \cdots \\ & r_{p1} < 4t^2 + 6t + 2 - (4t+2), \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{4t+3} r_i = \sum_{i=1}^{4t} r_{pi} < (4t+3)(4t^2+6t+2) - (4t+3)(2t+1)$$

$$= (2t+1)^2(4t+3) = \sum_{i=1}^{4t+3} r_i$$

此矛盾说明必 $\exists\, r_n \in \{r_1, r_2, \cdots, r_{4t+3}\}$, **使** $r_n \geq 4t^2+6t+2$ **因此**

$$a_n = \frac{k}{2} + \frac{d}{2}[(2t+1)(4t+3) - 2r_n] \leq \frac{k}{2} + \frac{d}{2}[(2t+1)(4t+3) - 2(4t^2+6t+2)]$$

$$= \frac{k}{2} - \frac{d}{2}(2t+1)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \min\{a_1, a_2, \cdots, a_{4t+3}\} \leq a_n \leq \frac{k}{2} - \frac{d}{2}(2t+1) \Rightarrow k \geq (2t+1)d.$$

由引理 4 **知** $k-(2t+1)d \equiv 0 \pmod 2$, **故** $k = (2t+1)d + 2r\ (r \geq 0, r \in N)$.

定理 2 **得证**

参 考 文 献

[1] B. D. Acharya, S. H. Hedge, *Arithmetic Graphs*, J. Graph. Theory, 14: 3(1990), 275-299.

[2] G. Chartrand, L. Leshiak, *Graphs & Digraphs*, Second Edition, Wadsworth & Brook, 1986.

A Proof of a Conjecture about Arithmetic Graph

Yu Ping

(Dept. of Math., Guangxi Normal University, Guilin 541004)

Abstract

Acharya and Hedge proposed the conjecture: (i) If a cycle C_{4t+1} is (k, d)-arithmetic then $k = 2dt + 2r$ for some integer $r \geq 0$. (ii) If a cycle C_{4t+3} is (k, d)-arithmetic then $k = (2t+1)d + 2r$ for some integer $r \geq 0$. This conjecture is proved in this paper.

Keywords arithmetic graph, cycle, conjecture.