第16卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.16 No.4
1996年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1996

关于Baskakov-Durrmeyer算子的一致逼近*

宣 培 才
(绍兴文理学院计算机系, 浙江312000)

摘 要 本文首先给出了Baskakov-Durrmeyer算子在一致逼近意义下的正定理, 并把它推广到一类线性组合的情形, 然后讨论了它的导数与光滑模的等价关系, 最后给出了二元Baskakov-Durrmeyer算子逼近阶的特征刻画

关键词 Baskakov-Durrmeyer算子, 一致逼近, 线性组合, 光滑模, 特征刻画
分类号 AMS(1991) 41A35/CCL O174.41

1 引 言

周知, 利用概率论中的格子点分布可以方便地给出Baskakov算子, 由于它在概率论和逼近论中的广泛应用, 至今已有众多的研究[2],[7],[8], 最近M. Heilmann在[1]中引进了如下的Baskakov-Durrmeyer算子:

$$L_n(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty}P_{nk}(x)(n-1)\int_0^{\infty}P_{nk}(t)f(t)dt,$$

并给出了如下结果: 如$f\in L_p[0,\infty)$, $1\le p<\infty$, 则有

$$\|L_n(f)-f\|_p\le M\{W_\varphi^2(f;n^{-\frac{1}{2}})+n^{-1}\|f\|_p\};$$

$$\|\varphi^{2r}(L_n(f))^{(2r)}\|_p=O(n^{r-\alpha})\Leftrightarrow\omega_\varphi^{2r}(t,t)_p=O(t^{2\alpha}).$$

显然上述结果中当$p=\infty$时没有解决, 这是因为$p=\infty$时不等式$\|f'\|_\infty\le M(\|f\|_\infty+\|\varphi^2f''\|_\infty)$不成立[2]. 本文旨在解决这一问题, 即研究在一致逼近意义下的正定理及导数与光滑模的等价性等问题

2 正定理

定理2.1 如$f\in C_{B[0,\infty)}$, 则

$$\|L_n(f)-f\|_\infty\le M\omega_1\left(f,\left(\frac{\varphi^2(x)}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right),\tag{2.1}$$

此处$C_{B[0,\infty)}$表示$[0,\infty)$上有界且连续的函数集, M表示常数(本文总用M表示不同常数). $\omega_r(f,t)=\sup_{0<h\le t}\|\Delta_h^rf\|_\infty$, $\Delta_h^rf(x)=\sum_{k=0}^{r}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}f(x+(k-\frac{r}{2})h)$, $x>\frac{rh}{2}$ (如$x\le\frac{rh}{2}$, 则

* 1993年9月28日收到. 96年4月28日收到修改稿 浙江省自然科学基金资助项目.

令 $\Delta_h^r f = 0$), $\varphi^2(x) = x(1+x)$.

证明 记 $W_{n,m}(x) = L_n((x-\bullet)^m; x)$, $n \in N$, $m \in N_0$, 则由[1]可知

$$W_{n,0}(x) = 1, W_{n,1}(x) = -\frac{1+2x}{n+1}, W_{n,2m}(x) = \sum_{i=0}^{m} q_{i,2m}\left(\frac{\varphi^2(x)}{n}\right)^{m-i} \bullet n^{-2i},$$
$$W_{n,2m+1}(x) = (1+2x)\sum_{i=1}^{m} q_{i,2m+1}\left(\frac{\varphi^2(x)}{n}\right)^{m-i} \bullet n^{-2i-1}, \tag{2.2}$$

这里的 $q_{i,m}$, $q_{i,2m+1}$ 均是与 x 无关且关于 n 是一致有界之实数. 命 D_r 表示如下 Sobolev 空间:

$$D_r := \{g \mid g \in C_{B[0,\infty)}, g^{(r-1)} \in A.C.loc, g^{(r)} \in C_{B[0,\infty)}\}.$$

命 $\|g\|_{D_r} = \|g\|_\infty + \|g^{(r)}\|_\infty$, 则如 $g \in D_r$, 由 Hölder 不等式与(2.2)可得

$$|L_n(g;x) - g| \le L_n(|t-x|;x)\|g'\|_\infty \le \|g'\|_\infty \{L_n((t-x)^2;x)\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\le M\left(\frac{\varphi^2(x)}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\|g'\|_\infty. \tag{2.3}$$

记 K-泛函 $K_r(f,t^r) := \inf\limits_{g \in D_r}\{\|f-g\|_\infty + t^r\|g\|_{D_r}\}$, 则由[2]可知

$$K_r(f,t^r) \sim \omega_r(f,t), \tag{2.4}$$

于是由(2.2), (2.3)可知

$$|L_n(f) - f| \le |L_n((f-g);x)| + |f-g| + |L_n(g) - g|$$
$$\le M\left(\|f-g\|_\infty + \|g'\|_\infty\left(\frac{\varphi^2(x)}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$\le M K_1\left(f, \left(\frac{\varphi^2(x)}{n} + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \le M\omega\left(f, \left(\frac{\varphi^2(x)}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

因此定理成立.

现将它推广到线性组合的情形. 设

$$L_{n,r}(f;x) = \sum_{k=0}^{r-1} c_i(n) L_{n_i}(f;x), \tag{2.5}$$

此处的 $c_i(n)$ 满足如下条件:

$$\text{(a)}\quad n = n_0 < n_1 < \cdots < n_{r-1} \le k_0 n, \qquad \text{(b)}\quad \sum_{i=0}^{r-1}|c_i(n)| \le k.$$
$$\text{(c)}\quad \sum_{i=0}^{r-1} c_i(n) = 1, \qquad \text{(d)}\quad \sum_{i=0}^{r-1} c_i(n) n_i^{-\rho} = 0, \rho = 1, 2, \cdots, r-1. \tag{2.6}$$

定理 2.2 设 $f \in C_{B[0,\infty)}$, 则

$$|L_{n,r}(f) - f| \le M\omega\left(f, \left(\frac{\varphi^2(x)}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{2.7}$$

证明 由(2.2), (2.6)可知 $L_{n,r}((\bullet - x)^k; x) = 0$, $k = 1, 2, \cdots, r-1$, 因此, 如取 $g \in D_r$, 则由 Hölder 不等式可得

$$|L_{n,r}(g) - g(x)| \le \left|L_{n,r}\left(\int (t-u)^{r-1} g^{(r)}(u)\,du/(r-1)!; x\right)\right|$$
$$\le \sum_{i=0}^{r-1}|c_i(n)| \bullet |L_{n_i}(|t-x|^r; x)| \bullet \|g^{(r)}\|_\infty$$
$$\le \sum_{i=0}^{r-1}|c_i(n)| \bullet |L_{n_i}((t-x)^{2r}; x)|^{\frac{1}{2}} \bullet \|g^{(r)}\|_\infty$$

$$\le \sum_{i=0}^{r-1}|c_i(n)|(M_1(r+1)(\frac{\varphi^2(x)}{n}+\frac{1}{n^2})^r)^{\frac{1}{2}}\cdot\|g^{(r)}\|_\infty$$

$$\le k_0(M_1(r+1))^{\frac{1}{2}}(\frac{\varphi^2(x)}{n}+\frac{1}{n^2})^{\frac{r}{2}}\|g^{(r)}\|_\infty, \tag{2.8}$$

于是结合(2.4), 可得定理成立:

$$|L_{n,r}(f)-f|\le|L_{n,r}(f-g)|+|f-g|+|L_{n,r}(g)-g|$$

$$\le(k_0+1)\|f-g\|_\infty+k_0(M_1(r+1))^{\frac{1}{2}}(\frac{\varphi^2(x)}{n}+\frac{1}{n^2})^{\frac{r}{2}}\|g^{(r)}\|_\infty$$

$$\le M_2k_r(f,(\frac{\varphi^2(x)}{n}+\frac{1}{n^2})^{\frac{r}{2}})\le M\omega_\varphi^r(f;(\frac{\varphi^2(x)}{n}+\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}}).$$

3 导数与光滑模的等价性

定理3.1 设 $f\in C_{B[0,\infty)}$, $r\in N$, $0<\alpha<r$, 则有

$$|L_n^{(r)}(f;x)|\le M(\min(n^2,\frac{n}{\varphi^2(x)})^{\frac{r-\alpha}{2}})\Leftrightarrow\omega_\varphi^r(f,h)=O(h^\alpha).$$

证明 当 $x\in[0,\infty)$, $n\in N$ 时, 由[1]可知 $|L_n^{(r)}(f-g)|\le 2^rn^r\|f-g\|_\infty$, 此处 $f\in C_{B[0,\infty)}$, $g\in D_r$, 又 $|(\varphi^2(x))^{\frac{r}{2}}L_n^{(r)}(g)|\le Mn^{\frac{r}{2}}\|g\|_\infty$, 于是可得

$$|L_n^{(r)}(f;x)|\le|L^{(r)}(f-g)|+|L_n^{(r)}(g)|$$

$$\le M_3\min\{2^rn^r,(\frac{n}{\varphi^2(x)})^{\frac{r}{2}}\}\|f-g\|_\infty+M_4\|g^{(r)}\|_\infty$$

$$\le M_5(\min\{n^2,\frac{n}{\varphi^2(x)}\})^{\frac{r}{2}}\}\{\|f-g\|_\infty+\min\{n^2,\frac{n}{\varphi^2(x)}\})^{\frac{r}{2}}\}\|g^{(r)}\|_\infty),$$

因此有 $|L_n^{(r)}(f)|\le M_6(\min\{n^2,\frac{n}{\varphi^2(x)}\})^{\frac{r}{2}})k_r(f,(\min\{n^2,\frac{n}{\varphi^2(x)}\})^{-\frac{r}{2}})$, 结合(2.4), 如 $\omega_\varphi^r(f,h)=O(h^\alpha)$, 则可得

$$|L_n^{(r)}(f)|\le M(\min\{n^2,\frac{n}{\varphi^2(x)}\})^{\frac{r}{2}})\cdot(\min\{n^2,\frac{n}{\varphi^2(x)}\})^{-\frac{\alpha}{2}})=M(\min\{n^2,\frac{n}{\varphi^2(x)}\})^{\frac{r-\alpha}{2}}.$$

充分性得证. 下证必要性: 由于 $L_n(f)$ 具有交换性[5], 故由定理2.2可知

$$|\Delta_t^rL_m(t;x)|\le|\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^{r-j}\{L_{n,r}(L_m(f;x+(j-\frac{r}{2})t)-L_m(f;x+(j-\frac{r}{2})t)\}|$$

$$+|\sum_{i=0}^{r-1}c_i(n)\Delta_t^rL_{n_i}(L_m(f;x)|\le\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}M_7\omega_\varphi^r(L_m(f;(\frac{1}{n^2}+\frac{\varphi^2(x)+(j-\frac{r}{2})t}{n})^{\frac{1}{2}})$$

$$+\sum_{i=0}^{r-1}|c_i(n)|\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}\cdots\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}|L_m^{(r)}(L_{n_i}(f);x+\sum_{j=1}^{r}u_j)|d_{u_1}d_{u_2}\cdots d_{u_r},$$

因此有(记 $d(n,\varphi(x),t):=\max\{\frac{1}{n},((\varphi^2(x)+\frac{rt}{2})/n)^{\frac{1}{2}}\}$)

$$|\Delta_t^tL_m(f)|\le 4^rM_7\omega_\varphi^r(L_m(f),d(n,\varphi^2(x),t))+\sum_{i=0}^{r-1}|c_i(n)|\cdot\|L_{n_i}^{(r)}(t)\|_\infty t^r.$$

注意到 $d(n,\varphi(x),t)<d(n-1,\varphi(x),t)\le 2d(n,\varphi(x),t)$, 因此如 $|L_n^{(r)}(f)|\le M\min\{n^2,$

$\frac{n}{\varphi^2(x)}\}^{\frac{r-\alpha}{2}}$，则有 $|\Delta_t^r L_m(f)| \le (4^r M_7 + k_0)\{\omega_r(L_m(f), d(n,\varphi(x),t) + t^r d(n,\varphi(x),t)^{\alpha-r}\}$.

选取 $\delta \in (0, \frac{1}{8r})$，则存在 $n \in N$，使得 $d(n,\varphi(x),t) \le \delta \le 2d(n,\varphi(x),t)$，因此可得

$$|\Delta_t^r L_m(f)| \le (4^r M_7 + k_0)\{\omega_r(L_m(f),\delta) + t^r \delta^{\alpha-r}\},$$

于是成立 $\omega_r(L_m(f),h) \le (4^r M_7 + k_0)\{\omega_r(L_m(f),\delta) + t^r\delta^{\alpha-r}\}$. 命 $T = 4^r M_7 + k_0 + 1$, $\delta = h/T$，则由归纳法可得

$$\omega_r(L_m(f),h) \le M_8((T^{-r})^k \|L_m^{(r)}(f)\|_\infty h^r + h^\alpha T^r).$$

注意到 $T > 1$，令 $k \to \infty$，则有 $\omega_r(L_m(f),h) \le M_8 h^\alpha T^r$. 又由于 $|\Delta_t^r f(x)| = \lim_{m\to\infty} |\Delta_t^r L_m(t)| \le M_8 T^r h^\alpha$，因此有 $\omega_r(f,h) \le M h^\alpha$.

4 多元情形

设 $L_{n,m}(f;x,y)$ 为如下二元 Baskakov-Durrmeyer 算子:

$$L_{n,m}(f;x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} P_{nk}(x)P_{ml}(y)(n-1)(m-1)\iint_{I^2} P_{nk}(s)P_{ml}(t)f(s,t)\,ds\,dt \quad (4.1)$$

此处 $I^2 = [0,\infty) \otimes [0,\infty)$, $f(s,t) \in C_B[I^2]$. 令

$$f_s(t) = f(s,t)\ (\text{固定 } s \in [0,\infty));\quad f^t(s) = f(s,t)\ (\text{固定 } t \in [0,\infty)).$$

则显见 $L_{n,m}(f;x,y)$ 具有交换性，即成立

$$L_{n,m}(f;x,y) = L_n(L_m(f_s(t);y);x) = L_m(L_n(f^t(s);x);y).$$

为方便计，本节中的 n,m 满足如下条件[5]:

$$0 \le k_1 \le \frac{n}{m} \le k_2 < \infty\ (k_1, k_2 \text{ 为常数}). \quad (4.2)$$

记 $D^* := \{f \mid f \in C_{B[I^2]}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in A.C._{\mathrm{loc}}(I^2), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \varphi^2(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \varphi^2(y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < +\infty\}$ 为 Sobolev 空间. 令 $\|U(f)\|_\infty = \|\varphi^2(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\|_\infty + \|\varphi^2(y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\|_\infty$; $\|V(f)\|_\infty = \|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\|_\infty + \|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\|_\infty$; $\|S_h(f)\|_\infty = \|U(f)\|_\infty + h\|V(f)\|_\infty$. 此处 $\|f(x,y)\|_\infty = \sup_x \sup_y |f(x,y)|$, $(x,y) \in I^2$.

定理 4.1 设 $f \in C_{B[I^2]}$, $0 < \alpha < 1$，则下列三式等价:

(i) $\|V_{n,m}(f;x,y) - f(x,y)\|_\infty = O(n^{-\alpha})$.

(ii) $K_{1,2}(f,t) = O(t^\alpha)$.

(iii) (a) $\|\Delta^2_{h\varphi(x)e_1} f(x,y)\|_\infty = O(h^{2\alpha})$, (b) $\|\Delta^2_{t\varphi(y)e_2} f(x,y)\|_\infty = O(t^{2\alpha})$.

此处 $K_{1,2}(f,t) = \inf_{g\in D^*}\{\|f-g\|_\infty + t\|S_h(g)\|_\infty\}$, $\Delta_{he_1} f(x,y) = f(x+\frac{h}{2},y) - f(x-\frac{h}{2},y)$, $\Delta_{te_2} f = f(x,y+\frac{t}{2}) - f(x,y-\frac{t}{2})$, $\Delta^2_{he_1} f = \Delta_{he_1}(\Delta_{he_1}(f))$, $\Delta^2_{te_2} f = \Delta_{te_2}(\Delta_{te_2} f)$.

由 $L_{n,m}(f)$ 的交换性，立得

引理 4.2 如 $f \in C_{B[I^2]}$，则有 $\|L_{n,m}(f)\|_\infty \le \|f\|_\infty$.

引理 4.3 如 $f \in D^*$，则有 $\|L_{n,m}(f) - f\|_\infty \le \frac{M}{n}\|S_{\frac{1}{n}}(f)\|_\infty$.

证明　应用[5]中的二元分解技巧,可得

$$L_{n,m}(f)-f=L_n(L_m(f_s(t);y);x)-L_n(f_s(t);x)+L_n(f^t(s);x)-f^2(x)]\cdot\!\!= I+J. \quad (4.3)$$

由[1,p. 121]可知

$$\|I\|_\infty=\|L_n(L_m(f_s(t);y);x)-L_m(f_s(t);x)\|_\infty\le\|L_n(L_m(f_s(t);y)-f_s(t);x)\|_\infty$$

$$\le\|L_n(\frac{M}{m}\|(\varphi^2(y)+\frac{1}{m})\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\|_\infty);x)\|_\infty\le\frac{M}{m}\|(\varphi^2(y)+\frac{1}{m})\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\|_\infty,$$

结合(4.2),即得$\|I\|_\infty\le\frac{M}{n}(\|\varphi^2(y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\|_\infty+\frac{1}{n}\|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\|_\infty)$.

同理可得$\|J\|_\infty\le\frac{M}{n}(\|\varphi^2(y)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\|_\infty+\frac{1}{n}\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\|_\infty)$,代入(4.3),即得引理

引理4.4　如$f\in C_{B[I^2]}$,则有$\|S_{\frac{1}{n}}(L_{n,m}(f))\|_\infty\le Mn\|f\|_\infty$.

证明　由[1,p110]及(4.2),可得

$$\|\varphi^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}L_{n,m}(f)\|_\infty=\|\varphi^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}L_n(L_m(f_s(t);y);x)\|_\infty$$

$$\le Mn\|\varphi^2(x)L_m(f_s(t);y)\|_\infty\le Mn\|f\|_\infty.$$

同理有$\|\varphi^2(y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}L_{n,m}(f)\|_\infty\le Mn\|f\|_\infty$. 又由[1,(3.9)]可得

$$\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}L_{n,m}(f)\|_\infty\le Mn^2\|f\|_\infty;\qquad\|\frac{\partial^2}{\partial y^2}L_{n,m}(f)\|_\infty\le Mn^2\|f\|_\infty.$$

于是引理成立

引理4.5　设$f\in D^*$,则有$\|S_{\frac{1}{n}}(L_{n,m}(f))\|_\infty\le M\|S_{\frac{1}{n}}(f)\|_\infty$.

证明　类似于引理4.4的证明,有

$$\|\varphi^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}L_{n,m}(f)\|_\infty\le M\|L_m(\varphi^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}L_n(f^t(s);x))\|_\infty$$

$$\le M\|\varphi^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}L_n(f^t(s);x)\|_\infty\le M\|\varphi^2(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\|_\infty.$$

同理可得$\|\varphi^2(y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}L_{n,m}(f)\|_\infty\le M\|\varphi^2(y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\|_\infty$. 又由[1;(3.11)]可得

$$\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}L_{n,m}(f)\|_\infty\le M\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\|_\infty;\qquad\|\frac{\partial^2 L_{n,m}(f)}{\partial y^2}\|_\infty\le M\|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\|_\infty.$$

因此引理4.5成立

定理4.1的证明　由上述引理及A. Grundmann[6]的结论,(i)⇒(ii)是显然的

(ii)⇒(iii):设$g\in D^*$,则

$$\|\Delta^2_{h\varphi(x)e_1}(f)\|_\infty\le\|\Delta^2_{h\varphi(x)e_1}(f-g)\|_\infty+\|\Delta^2_{h\varphi(x)e_1}(g)\|_\infty$$

$$\le M\|f-g\|_\infty+\|\iint_{-\frac{h\varphi(x)}{2}}^{\frac{h\varphi(x)}{2}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x+u_1+u_2,y)\,du_1du_2\|_\infty$$

$$\le M\|f-g\|_\infty+h^2\|\varphi^2(x)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\|_\infty,$$

于是可得$\|\Delta^2_{h\varphi(x)e_1}(f)\|_\infty\le MK_{1,2}(f,h^2)\le Mh^{2\alpha}$. 同理可证明$\|\Delta^2_{t\varphi(y)e_2}(f)\|_\infty\le Mt^{2\alpha}$. (ii)⇒(iii)得证 最后证(iii)⇒(i):由(iii)可得$\omega^2_\varphi(f^t(s);h)=O(h^{2\alpha})$,此处$\omega^2_\varphi(f,t)$为二阶加权光滑模[2].

于是由[1, p124]可得

$$\|L_{n,m}(f)-f\|_\infty=\|L_m(L_n(f^t(s)-f^y(x))\|_\infty\le\|L_n(f^t(s)-f^y(x))\|_\infty$$
$$\le M(\overline{K}^2_\varphi(f,n^{-1})_\infty+n^{-1}\|f\|_\infty).$$

由于 $\overline{K}^2_\varphi(f^t(s),n^{-1})_\infty\sim\omega^2_\varphi(f^t(s);n^{-\frac{1}{2}})$, 因此由(iii)知

$$\|L_{n,m}(f)-f\|_\infty\le M((\omega^2_\varphi(f^t(s),n^{-\frac{1}{2}})+n^{-1})\le Mn^{-\alpha}.$$

定理证毕.

作者感谢郭竹瑞教授和周定轩博士的支持和帮助.

参 考 文 献

[1] M. Heilmann, *Direct and coverse results for operators of Baskakov-Durrmeyer type*, Approxi Theory & Applica., 5: 1(1989), 105-127.

[2] Z. Ditzian and V. Totik, *Moduli of Smoothness*, Springer-Verlag, New York, etc, 1987.

[3] Xuan Peicai, *Uniform approximation by the combinations of Ismail-May operators*, J. Math. Research & Exposition, 12(2)(1992), 193-200.

[4] 宣培才, 关于 Gauss-Weierstrass 算子线性组合的逼近, 数学研究与评论, 12(1)(1992), 137—142.

[5] Zhou Dingxuan, Xuan Peicai, Zhang Zhenqiu, *Uniform approximation by multidimensional Szasz-Mirakjan operator*, J. Math. Research & Exposition, 12(2)(1992), 187-192.

[6] A. Grundmann, *Inverse Theorems for Kantorovich Polynomials*, in "*Fourier Analysis and Approximation Theory*", North-Holland, Amsterdam, 1978, 395-401.

[7] V. Totik, *Uniform approximation by Baskakov and Meyer-König and Zeller operators*, Periodica Math. Hungar., 14(1983), 209-228.

[8] C. P. May, *Saturation and inverse theorems for combinations of a class of exponeutial type operators*, Canad. J. Math., 28(1976), 1224-1250.

Uniform Approximation by Baskakov-Durrmeyer Operators

Xuan Peicai

(Dept. of Comp. Sci., Shaoxing College of Arts and Sciences, Zhejiang 312000)

Abstract

We discuss the direct theory of Baskakov-Durrmeyer operators $L_n(f)$ in uniform approximation and the equivalence bettween the derivative of $L_n(f)$ and the muduli of smoothness, then we extend the direct theory to a class of combinations of $L_n(f)$. We obtain the characterizations of multidimensional Baskakov-Durrmeyer operators in uniform approximation.

Keywords Baskakov-Durrmeyer operators, uniform approximation, moduli of smoothness, characterization.