第16卷第4期 数学研究与评论 Vol.16 No.4
1996年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1996

齐型空间上的分数次极大函数与分数次积分在 $p=1$ 时的加权不等式*

兰 家 诚
(浙江省丽水师范专科学校, 323000)

摘 要 本文建立了 $p=1$ 时齐型空间上的分数次极大函数与分数次积分的强型加权不等式. 完善了潘文杰[1]的结果, 并将 G. V. Welland[2]的结果推广到齐型空间.

关键词 齐型空间, $A(p,q)$ 权函数, 分数次极大函数, 分数次积分.
分类号 AMS(1991) 42B25/CCL O174.42

一 引 言

Coifman 和 Weiss[3] 在 1971 年给出了齐型空间 X 的定义, 得到了齐型空间上的 Calderón-Zygmund 分解定理. 1976 年 A. P. Calderón[4] 引入了齐型空间上的 A_p 权函数的概念, 得到齐型空间上的逆 Hölder 不等式. 本文利用[1], [4]的结果进一步讨论上述分数次极大函数与分数次积分在 $p=1$ 时的强型加权不等式.

在本文中, 总是假定 (X,d,μ) 是齐型空间, 并且假定具有有界支集的连续函数组成的空间包含在 $L^1(X,d,\mu)$ 中而且稠密. 得到

定理 1 设 $p=1, \frac{1}{q}=1-\alpha, 0\le\alpha<1, u(x)\in A(1,q), f$ 具有支集在一个球 B 内, 则

$$\left[\int\left|(M_\alpha f)(x)u(x)\right|^q d\mu(x)\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$\le c\left[W(B)+\int\left(\left|f(x)\right|\log^+\left|f(x)u^{1-q}(x)\right|\right)u(x)d\mu(x)\right],$$

其中 $W(B)=\int W(x)d\mu(x), W(x)=u^q(x)$.

定理 2 设齐型空间 (X,d,μ) 满足条件 Ⅰ, 且 $p=1, \frac{1}{q}=1-\alpha, u(x)\in A(1,q), 0\le\alpha<1, f$ 具有支集在一个球 B 内, 则

$$\left[\int\left|(I_\alpha f)(x)u(x)\right|^q d\mu(x)\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$\le c\left[W(B)+\int\left(\left|f(x)\right|\log^+\left|f(x)u^{1-q}(x)\right|\right)u(x)d\mu(x)\right],$$

其中 $W(B)=\int W(x)d\mu(x), W(x)=u^q(x)$, 分数次极大函数 $M_\alpha f(x)$, 分数次积分 $I_\alpha f(x)$ 的

* 1994年1月3日收到. 96年5月14日收到修改稿.

定义,条件 Ⅰ 的概念见文献[1].

二　引理及证明

引理 1[5]　(1) 在齐型空间(X, d, μ) 中,若$W(x) \in A_p, p \geq 1$,则存在 $r > 1$ 及常数 c,使得对一切球B 有$\left(\frac{1}{\mu(B)}\int W^r(x)\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}} \leq c\frac{1}{\mu(B)}\int W(x)\, d\mu(x)$.

(2) 若$W(x) \in A_p, p > 1$,则存在某个 $p_0 < p$,使得$W(x) \in A_q$ 对一切 $q > p_0$.

引理 2　设 $u(x) \in A(p, q), p \geq 1$,且$W(x) = u^q(x)$,则$W(x) \in A_r$,其中 $r = 1 + \frac{q}{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ($p = 1$ 时 $r = 1$).

由$A(p, q)$ 的定义(见[1], p544) 即可得证.

引理 3　(1) 若 $1 \leq p < \infty, q_1 \leq q_2$,则$A(p, q_2) \subseteq A(p, q_1)$;

(2) 若 $1 \leq q < \infty, p_1 \leq p_2$,则$A(p_1, q) \subseteq A(p_2, q)$.

由定义及Hölder 不等式可证得.

引理 4　设 $u(x) \in A(1, q)$, $\frac{1}{q} = 1 - \alpha, 0 \leq \alpha < 1$,则存在 $p_0 > 1, q_0 > 1$ 满足$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} - 2$ 而 $u(x) \in A(p_0, q_0)$.

证明　因为 $u(x) \in A(1, q)$,所以由引理 2 可得,$W(x) = u^q(x) \in A_1$. 再由引理 1 中的逆Hölder 不等式知存在 $\delta > 0, c > 0$,使得

$$\left(\frac{1}{\mu(B)}\int u^{q(1+\delta)}\, d\mu\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq c\frac{1}{\mu(B)}\int u^q\, d\mu, \tag{2.1}$$

另一方面选 q_1 满足 $1 < q_1 < \min\{1 + q, \frac{1 + 2\delta}{1 + \delta}\}$. 则由 $u^q(x) \in A_1 \subset A_{q_1}$ 可得

$$\left(\frac{1}{\mu(B)}\int u^q\, d\mu\right)\left(\frac{1}{\mu(B)}\int u^{-\frac{q}{q_1-1}}\, d\mu\right)^{q_1-1} \leq c, \tag{2.2}$$

即

$$\left(\frac{1}{\mu(B)}\int u^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{\mu(B)}\int u^{-\frac{q}{q_1-1}}\, d\mu\right)^{\frac{q_1-1}{q}} \leq c^{\frac{1}{q}}. \tag{2.3}$$

令 $p_0' = \frac{q}{q_1 - 1}$,则可求得 $p_0 = \frac{q}{q - q_1 + 1}$,且 $p_0 > 1$. 再由 $1 - \alpha = \frac{1}{q}$ 可求得满足$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} - \alpha$ 的 $q_0 = \frac{q}{2 - q_1}$ 且 $q < q_0 < q(1 + \delta)$.

最后由Hölder 不等式, (2.1) 及(2.3) 可验证 $u(x) \in A(p_0, q_0)$,其中$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} - \alpha$ 证毕.

引理 5　设 $u \in A(1, q), 1 \leq q < \infty, \frac{1}{q} = 1 - \alpha, 0 \leq \alpha < 1$ 且$W(x) = u^q(x)$,则存在 $p_0 > 1, q_0 > 1$ 满足$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} - \alpha$ 使得$(W, W^{\frac{p_0}{q_0}}) \in A(p_0, q_0, \alpha)$.

由引理 2、引理 4 及$A(p_0, q_0, \alpha)$ 的定义(见[1], p545) 即可得证.

引理 6[1]　设 $0 \leq \alpha < 1, 1 \leq p \leq q < \infty, \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \alpha \geq 0$,则

$$\int_{\{M_\alpha f>\lambda\}} W\,d\mu \le \frac{c}{\lambda^q}\left(\int |f|^p V\,d\mu\right)^{\frac{q}{p}},$$

对 $f\in L^p(V\,d\mu)$ 成立的充要条件是 $(W,v)\in A(p,q,\alpha)$.

引理 7[4],[5] 设 T 是弱 (p_j,q_j) 型的次可加算子, 其中 $1\le p_j\le q_j<\infty$, $j=1,2$ 且 $q_1\ne q_2$, 则当 $0<t<1$ 时, 若 $\frac{1}{p_t}=\frac{1-t}{p_2}+\frac{t}{p_1}$, $\frac{1}{q_t}=\frac{1-t}{q_2}+\frac{t}{q_1}$, 则 T 是 (p_t,q_t) 型的, 即存在常数 $c>0$, 使得

$$\left(\int |Tf|^{q_t}d\mu\right)^{\frac{1}{q_t}}\le c\left(\int |f|^{p_t}d\mu\right)^{\frac{1}{p_t}},$$

且当 $t\to 1$ 时, $c=c_t=O\left(\frac{1}{1-t}\right)$, 其中 (X,μ) 为测度空间

引理 8 若 $W(x)>0$ 为齐型空间 (X,d,μ) 上的 A_p 权函数, 则 $W(x)d\mu(x)$ 满足双倍条件, 即 $(X,d,W(x)d\mu(x))$ 构成一个新的齐型空间

三 定理的证明

定理 1 的证明 设 $g(x)=f(x)u^{-q\alpha}(x)$, $W(x)=u^q(x)$, T 为一个次线性算子

$$(Tg)(x)=M_\alpha(gW^\alpha)(x),$$

$$E_k=\{x\in B\,\big|\,2^k\le |g(x)|<2^{k+1}\},\ k=0,1,2,\cdots,$$

$$g_k(x)=\chi_{E_k}(x)g(x),$$

其中 χ_{E_k} 为 E_k 的特征函数 因为 $u(x)\in A(1,q)$, $\frac{1}{q}=1-\alpha$, 所以由引理 4 知 $u(x)\in A(p_0,q_0)$, 其中 $p_0>1$, $q_0>1$ 且满足 $\frac{1}{q_0}=\frac{1}{p_0}-\alpha$ 由文献[1]中的定理 1, 知 T 是 $(X,W\,d\mu)$ 空间上的弱 $(1,q)$ 型算子.

下面将证明 T 是 $(X,W\,d\mu)$ 上的弱 (p_0,q_0) 型算子

事实上, 由引理 5 可得 $(W,W^{\frac{p_0}{q_0}})\in A(p_0,q_0,\alpha)$, 从而由引理 6 可得

$$\int_{\{(Tg)(x)>\lambda\}} W\,d\mu\le\frac{c}{\lambda^{q_0}}\left(\int |gW^\alpha|^{p_0}W^{\frac{p_0}{q_0}}d\mu\right)^{\frac{q_0}{p_0}},\tag{3.1}$$

而 $|gW^\alpha|^{p_0}W^{\frac{p_0}{q_0}}=|g|^{p_0}\cdot W^{\alpha p_0+1-\alpha p_0}=|g|^{p_0}W$, 从而

$$\int_{\{(Tg)(x)>\lambda\}} W\,d\mu\le\frac{c}{\lambda^{q_0}}\left(\int |g|^{p_0}W\,d\mu\right)^{\frac{p_0}{q_0}},\tag{3.2}$$

即 T 是弱 (p_0,q_0) 型的

由引理 2 和引理 8 知 $(X,d,W\,d\mu)$ 是一个齐型空间

设 $\frac{1}{p_t}=t+\frac{1-t}{p_0}$, $\frac{1}{q_t}=\frac{t}{q}+\frac{1-t}{q_0}$, 则由引理 7 知

$$\left(\int |(Tg)(x)|^{q_t}W\,d\mu\right)^{\frac{1}{q_t}}\le c\left(\int |g(x)|^{p_t}\cdot W\,d\mu\right)^{\frac{1}{p_t}},$$

其中 $t=\frac{k+1}{k+2}$, $c_t=O\left(\frac{1}{1-t}\right)=O(k+2)$. 则由 $\frac{1}{q}=1-\alpha$, $\frac{1}{q_0}=\frac{1}{p_0}-\alpha$ 可证得 $\frac{1}{q_t}=\frac{1}{p_t}-$

α 因此

$$\left[\int_B |(Tg)(x)|^q W\,d\mu\right]^{\frac{1}{q}} = \left[\sum_{k=0}^{\infty}\int_{E_k} |(Tg_k)|^q W\,d\mu + \int_{\{x\in B\,|\,0\le |g(x)|<1\}} |(Tg)|^q W\,d\mu\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \left[\sum_{k=0}^{\infty}\int_{E_k} |(Tg_k)|^q W\,d\mu + \int_{B-E_1} |(Tg_1)|^q W\,d\mu\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \left[\sum_{k\neq 1}\int_{E_k} |(Tg_k)|^q W\,d\mu + \int_{B} |(Tg_1)|^q W\,d\mu\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \left[\sum_{k=0}^{\infty}\int_{B} |(Tg_k)|^q W\,d\mu\right]^{\frac{1}{q}} \le \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{B} |(Tg_k)|^q W\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\int_B |(Tg_k)|^{q_k}\cdot W\,d\mu\right)^{\frac{q}{q_k}}\cdot\left(\int_B W\,d\mu\right)^{1-\frac{q}{q_k}}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty}(W(B))^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_k}}\cdot c_t\left(\int_B |g_k|^{p_k} W\,d\mu\right)^{\frac{1}{p_k}},$$

其中$W(B) = \int_B W(x)\,d\mu(x)$, 且

$$\int_B |g_k(x)|^{p_k} W(x)\,d\mu(x) = \int_{E_k} |g_k(x)|^{p_k} W(x)\,d\mu(x) \le (2^{k+1})^{p_k}\cdot\int_{E_k} W(x)\,d\mu(x),$$

所以

$$\left[\int_B |(Tg)(x)|^q W(x)\,d\mu(x)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty}(W(B))^{1-\frac{1}{p_k}}\cdot c(k+2)\cdot 2^{k+1}\cdot\left(\int_{E_k} W(x)\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p_k}}$$

$$= cW(B)\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)\cdot\left[\frac{W(E_k)}{W(B)}\right]^{\frac{1}{p_k}}\cdot 2^{k+1}.$$

设$N_1 = \{k$ 为非负整数 $|\left[\frac{W(E_k)}{W(B)}\right]^{\frac{1}{p_k}} \le 3^{-(k+1)}\}$, N_2 为非负整数关于 N_1 的余集. 下证对 $k \in N_2$ 由$\frac{W(E_k)}{W(B)} \le 1$ 可得存在常数 c 使得

$$\left[\frac{W(E_k)}{W(B)}\right]^{\frac{1}{p_k}-1} \le c. \qquad (3.3)$$

事实上, 由 $k\in N_2$ 可得$\left[\frac{W(E_k)}{W(B)}\right]^{\frac{1}{p_k}} > 3^{-(k+1)}$, 所以$W(B) < (3^{(k+1)})^{p_k}\cdot W(E_k)$, 从而要证(3.3)也即证

$$W(B) \le c^{\frac{p_k}{p_k-1}} W(E_k). \qquad (3.4)$$

取 $c = 3^{\frac{p_0-1}{p_0}}$, 则

$$W(B) < (3^{(k+1)})^{p_k}\cdot W(E_k) = (c^{\frac{p_0}{p_0-1}(k+1)})^{p_k}\cdot W(E_k),$$

即(3.4) 式成立, 从而(3.3) 式成立. 则

$$\left[\int_B |(Tg)(x)|^q W(x)\,d\mu(x)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\le cW(B)\sum_{k\in N_1}(k+2)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} + cW(B)\sum_{k\in N_2}(k+2)\cdot\left(\frac{W(E_k)}{W(B)}\right)^{\frac{1}{p_k}-1}\cdot\frac{W(E_k)}{W(B)}\cdot 2^{k+1}$$

$$\leq cW(B)\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}+c\sum_{k\in N_2}(k+2)\cdot 2^{k+1}\cdot W(E_k).$$

而由级数判别法知 $\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$ 收敛, 且

$$\begin{aligned}
&\int_B |g(x)|\cdot\log^+|g(x)|W(x)d\mu(x)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{E_k}|g_k(x)|\cdot\log^+|g_k(x)|W(x)d\mu(x)\\
&\quad+\int_{B-\bigcup_{k=0}^{\infty}E_k}|g_k(x)|\cdot\log^+|g_k(x)|W(x)d\mu(x)\\
&\geq\sum_{k=0}^{\infty}\int_{E_k}|g_k(x)|\cdot\log^+|g_k(x)|\cdot W(x)d\mu(x)\\
&>\sum_{k=0}^{\infty}\int_{E_k}2^k\cdot c\cdot(k+2)W(x)d\mu(x)>c\sum_{k\in N_2}2^{k+1}\cdot(k+2)W(E_k),
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
&\left[\int_B|(Tg)(x)|^qW(x)d\mu(x)\right]^{\frac{1}{q}}\\
&\leq cW(B)\sum_{k\in N_1}(k+2)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}+c\sum_{k\in N_2}(k+2)2^{k+1}\cdot W(E_k)\\
&\leq cW(B)+c\int_B|g(x)|\cdot\log^+|g(x)|W(x)d\mu(x)\\
&=c\left[W(B)+\int_B|g(x)|\cdot\log^+|(g(x)|W(x)d\mu(x)\right].
\end{aligned}$$

又由 $g(x)=f(x)u^{-q\alpha}$, $(Tg)(x)=M_\alpha(g\cdot W^\alpha)(x)$, $W=u^q$, 可得

$$(Tg)(x)=M_\alpha(f\cdot u^{-q\alpha}\cdot u^{q\alpha})(x)=(M_\alpha f)(x),\ g(x)=f(x)u^{1-q}(x).$$

综合可得

$$\left[\int_B|(M_\alpha f)(x)u(x)|^q du(x)\right]^{\frac{1}{q}}\leq c\left[W(B)+\int_B(|f(x)|\cdot\log^+|fu^{1-q}|)u(x)d\mu(x)\right].$$

定理 2 的证明方法与定理 1 相似, 只需将原次线性算子 T 换成次线性算子 T_1:

$$(T_1g)(x)=I_\alpha(gW^\alpha)(x),$$

并注意到文献[1]中的定理 2(p547) 及引理得到

$$\left[\int_B|(T_1g)(x)|^{q_t}\cdot W(x)d\mu(x)\right]^{\frac{1}{q_t}}\leq c\left[\int_B|g(x)|^{p_t}W(x)d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p_t}}$$

时, 应用到齐型空间 (X,d,μ) 中的条件 Ⅰ. 这里省略证明.

作者衷心感谢导师王斯雷教授的精心指导.

参　考　文　献

[1] 潘玉杰, 关于齐型空间上的分数次积分与极大函数的加权不等式, 北京大学学报, 5(1990), 543-553.

[2] G. V. Welland, *Weighted norm inequalities for fractional integrals*, Proc. Amer. Soc., 1 (1975), 143- 148.

[3] R. R. Coifman, G. Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogenes*, Lecture Nores in Math. 242, Spring-Verlag, Berlin, 1971, 66- 77.

[4] A. P. Calderón, *Inequalities for the maximal function relative to a metric*, Studia Math., 57 (1976), 297- 306.

[5] Long Ruilin, Shen Zhongwei, Yang Yudi, *Weighted inequalities concerning maximal operator and #-operator on spaces of homogeneous type*, Appro. Theory and its Appl, 1(1985), 53- 72.

[6] E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ Press, 1971.

Weighted Norm Inequalities of $p = 1$ for Fractional Integrals and Maximal Functions on Spaces of Homogeneous Type

Lan Jiacheng

(Lishui Teachers' College, Zhejiang 323000)

Abstract

In this paper, we study weighted norm inequalities of $p = 1$ for fractional and maximal functions on spaces of homogeneous type.

Keywords the space of homogeneous type, $A(p, q)$ weight functions, fractional integrals, fractional maximal functions