第16卷第4期　　　　数学研究与评论　　　　Vol. 16 No. 4
1996年11月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Nov. 1996

加权BMO函数空间上的Hardy-Littlewood极大算子*

王　月　山
(河南焦作大学基础部, 454151)

摘　要　本文给出了Hardy-Littlewood极大函数的加权BMO的有界性证明: 即若$f\in BMO_w, w\in A_\infty$, 且$\inf\limits_{x\in R^n} Mf(x)<\infty$, 则$M(f)(x)\in BMO_w$, 且$\|M(f)\|_{w*}\le c\|f\|_{w*}$.

关键词　极大算子, 加权BMO有界性, 权函数
分类号　AMS(1991) 47B/CCL O177.1

§1　引言及主要结论

任给$f\in L_{loc}(R^n)$, 定义Hardy-Littlewood极大函数:

$$M(f)(x)=\sup\{\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)dy: Q\text{ 为含 }x\text{ 的方体}\},$$

Bennett, Devore与Sharply[1]利用Calderon-Zygmund分解证明了当$\inf\limits_{x\in R^n}M(f)(x)<\infty$时, 则$M(f)(x)\in BMO$, 且有: $\|M(f)\|_*\le c\|f\|_*$. 本文将给出$M(f)(x)$的加权BMO有界性的证明

在[2]中, B. Muckenhoupt和R. L. Wheeden引入了加权BMO函数空间的定义:

设$f(x)$和$w(x)$为R^n上局部可积函数且$w(x)\ge 0$, 则称f为关于权w的BMO函数, 如果存在常数c使得:

$$\int_Q|f(x)-f_Q|dx\le c\int_Q w(x)dx\quad(\text{这里 } f_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx)$$

对所有边平行于坐标轴的R^n中方体Q成立 记$BMO_w=\{f: f\in L_{loc}(R^n)$且$f$满足上式$\}$. 满足上面式子最小的常数$c$叫$f$的$BMO_w$范数, 记为$\|f\|_{w*}$. [4]中证明了$w\in A_1$时, Littwood-Paley算子的$BMO_w$有界性 对于$M(f)(x)$, 有下面的结论:

定理　若$f\in BMO_w$, 且$\inf\limits_{x\in R^n}M(f)(x)<\infty, w\in A_\infty$, 则$M(f)(x)\in BMO_w$, 且存在不依赖于$f$的常数$c$, 使得$\|M(f)\|_{w*}\le c\|f\|_{w*}$.

§2　引理及其证明

引理1　设$f\in BMO_w, w\in A_\infty$, 定义

$$\|f\|'_{w*}=\sup_B\frac{1}{w(B)}\int_B|f(y)-f_B|dy,$$

*　1994年3月28日收到

其中B为R^n中的球, 则$\|f\|'_{w*}\sim\|f\|_{w*}$.

证明　设B为在方体Q的外接球, 则$Q\subset B\subset 2Q$, 由$w\in A_\infty$, $\frac{|Q|}{|B|}<1$, $\frac{|B|}{|2Q|}<1$, 所以存在小于1的数c_1, c_1', 使得: $w(Q)\le c_1 w(B)$, $w(B)\le c_1' w(2Q)\le c w(Q)$, 所以

$$\begin{aligned}\|f\|_{w*} &= \sup_Q \frac{1}{w(Q)}\int_Q |f(y)-f_Q|dy\\ &\le \sup_B \left[\frac{c}{w(B)}\int_B|f(y)-f_B|dy + \frac{|Q|}{w(Q)}|f_B - f_Q|\right]\\ &\le c\sup_B \frac{1}{w(B)}\int_B |f(y)-f_B|dy = c\|f\|'_{w*}\end{aligned}$$

同样, $\|f\|'_{w*}\le c\|f\|_{w*}$, 所以$\|f\|'_{w*}\sim\|f\|_{w*}$.

引理2　记$f\in BMO_w$, $w\in A_\infty$, 则对任一球体B, 存在仅依赖于n的常数c, 使得:

$$\left(\int_{R^n}\frac{r|f(y)-f_B|^2}{(r+|y-y_0|)^{n+1}}dy\right)^{\frac12}\le c\|f\|_{w*}\frac{w(B)}{|B|},$$

其中r为B的半径

证明　首先, 有$\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)-f_B|^3 dy \le c\|f\|^2_{w*}\frac{w^2(B)}{|B|^2}$. 事实上, 利用[2]中定理4及反向Hölder不等式[3],

$$\begin{aligned}\int_B|f(y)-f_B|^2dy &= \int_B |f(y)-f_B|^2 w^{-\frac43} w^{\frac43} dy\\ &\le \left(\int_B |f(y)-f_B|^3 w^{-2}dy\right)^{\frac23} \left(\frac{1}{|B|}\int_B w^4 dx\right)^{\frac14\cdot\frac43} |B|^{\frac13}\\ &\le c[\|f\|^2_{w*} w(B)]^{\frac23} \left(\frac{1}{|B|}\int_B w\, dy\right)^{\frac43} |B|^{\frac13}\\ &= c\|f\|_{w*}\frac{w^2(B)}{|B|}.\end{aligned}$$

其次, 令$B_j=2^jB$为半径为2^jr的球, $B_0=B$, 则$|f_{B_k}-f_{B_{k-1}}|\le c\|f\|_{w*}\frac{w(B_k)}{|B_k|}$, 利用$(\sum_{i=1}^n a_i)^2\le(n+1)\sum_{i=1}^n a_i^2$,

$$\begin{aligned}\int_{B_k}|f(y)-f_B|^2dy &\le c\left[\int_{B_k}|f(y)-f_{B_k}|^2dy+|B_k|\sum_{j=1}^k|f_{B_j}-f_{B_{j-1}}|^2\right]\\ &\le c\|f\|^2_{w*}\left(\frac{w^2(B_k)}{|B_k|}+\sum_{j=1}^k 2^{n(k-j)}\frac{w^2(B_j)}{|B_j|}\right)\le c\|f\|^2_{w*}\sum_{j=1}^k 2^{n(k-j)}\frac{w^2(B_j)}{|B_j|}.\end{aligned}$$

类似于[4]中引理的证明:

$$\begin{aligned}\int_{R^n}\frac{r|f(y)-f_B|^2}{(r+|y-y_0|)^{n+1}}dy &\le cr^{-n}\int_B|f(y)-f_B|^2dy+\sum_{k=1}^\infty\int_{B_k\setminus B_{k-1}}\frac{r|f(y)-f_B|^2}{(r+|y-y_0|)^{n+1}}dy\\ &\le c\|f\|^2_{w*}\frac{w^2(B)}{|B|^2}+c\sum_{k=1}^\infty 2^{-k(n+1)}r^{-n}\int_{B_k}|f(y)-f_B|^2dy\\ &\le c\|f\|^2_{w*}\frac{w^2(B)}{|B|^2}+c\sum_{k=1}^\infty 2^{-k(n+1)}r^{-n}\sum_{j=1}^k 2^{(k-j)n}\frac{w^2(B_j)}{|B_j|}\|f\|_{w*}\end{aligned}$$

$$\le c\|f\|_{w*}^2\left(\frac{w^2(B)}{|B|^2}+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty}2^{-k}\frac{w^2(B_j)}{|B_j|^2}\right)\le c\|f\|_{w*}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{w^2(B_j)}{|B_j|^2}$$

$$\le c\|f\|_{w*}^2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{w^2(B_j\setminus B_{j-1})}{|B_j|^2}\quad (B_{-1}=0)$$

$$\le c\|f\|_{w*}^2\sum_{j=0}^{\infty}\left(\int_{Q_j\setminus Q_{j-1}}\frac{rw(y)}{(r+|y-y_0|)^{n+1}}dy\right)^2$$

$$\le c\|f\|_{w*}^2\left(\sum_{j=0}^{\infty}\int_{Q_j\setminus Q_{j-1}}\frac{rw(y)}{(r+|y-y_0|)^{n+1}}dy\right)^2$$

$$=c\|f\|_{w*}^2\left(\int_{R^n}\frac{rw(y)}{(r+|y-y_0|)^{n+1}}dy\right)^2\le c\|f\|_{w*}^2\frac{w^2(B)}{|B|^2}.$$

引理3 设B_0为半径为1的球，$\varphi(x)=\chi_{B_0}(x)$，$\varphi_t(x)=t^{-n}\varphi(\frac{x}{t})$，$\widetilde{B}=4B$，$B$ 为中心为x_0半径为 r 的球，$f\in BMO_w$，则

$$\sup_{\substack{t>0\\x\in B}}\left|\int_{\widetilde{B}^c}(\varphi_t(x-y)-\varphi_t(x_0-y))(f(y)-f_{\widetilde{B}})dy\right|\le c\|f\|_{w*}\frac{w(B)}{|B|}.$$

证明 令$B_{x,x_0}(t)=B_x(t)\Delta B_{x_0}(t)$（$\Delta$ 为对称差），则当 $t<3r$ 及 $x\in B$ 时，$B_{x,x_0}(t)\cap\widetilde{B}^c=\varnothing$. 而且：$|\varphi_t(x-y)-\varphi_t(x_0-y)|\le t^{-n}\chi_{B_{x,x_0}(t)}(y)$，由引理1

$$\text{左}\le\sup_{\substack{t>3r\\x\in B}}\int_{t-r<|y-x_0|<t+r}t^{-n}|f(y)-f_{\widetilde{B}}|dy$$

$$\le c\sup_{t>3r}\left(\int_{t-r<|y-x_0|<t+r}t^{-2n}|f(y)-f_{\widetilde{B}}|^2dy\right)^{\frac12}(t^{n-1}r)^{\frac12}$$

$$\le c\left(\int_{R^n}\frac{r|f(y)-f_{\widetilde{B}}|^2}{(r+|y-x_0|)^{n+1}}dy\right)^{\frac12}$$

$$\le c\|f\|_{w*}\frac{w(\widetilde{B})}{|\widetilde{B}|}\le c\|f\|_{w*}\frac{w(B)}{|B|}.$$

引理4[5] 设$\widetilde{M}(f)(x)$为球形极大函数：

$$\widetilde{M}(f)(x)=\sup_{x\in B}\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)|dy,$$

则 $c_1\widetilde{M}(f)(x)\le M(f)(x)\le c_2\widetilde{M}(f)(x)$.

§3 定理的证明

由引理4，只需要证明$\|\widetilde{M}(f)\|_{w*}\le c\|f\|_{w*}$即可. 又$\int_B|f(y)-f_B|dy\le 2\int_B|f(y)-a|dy$，所以只需要证明，对某个常数 a，$\int_B|\widetilde{M}(f)(y)-a|dy\le c\|f\|_{w*}w(B)$.

设$\widetilde{M}(f)(x_0)<\infty$，$B$ 为以x_0为中心，半径为 r 的球，$\widetilde{B}=4B$，将f 写成：

$$f=(f)_{\widetilde{B}}+(f-f_{\widetilde{B}})\chi_{\widetilde{B}}+(f-f_{\widetilde{B}})\chi_{\widetilde{B}^c}=f_1+f_2+f_3,$$

则

$$\varphi_t*f(x)=\varphi_t*f_1(x)+\varphi_t*f_2(x)+\varphi_t*f_3(x),$$

这里$\varphi_t*f_1(x)=c_nf_{\widetilde{B}}=a_B$ 为常数（对任 $t>0$，$x\in R^n$），又

$$\int_B \sup_{t>0} |\varphi_t * f_2(x)| dx \le c \int_B |\tilde{M}(f_2)| dx \le c|B|^{\frac{1}{2}}\left(\int_{R^n} |\tilde{M}(f_2)(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le c|B|^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\tilde{B}} |f - f_{\tilde{B}}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le c\|f\|_{w*} w(B),$$

以及

$$\sup_{\substack{x\in B\\ t>0}} |\varphi_t * f_3(x) - \varphi_t * f_3(x_0)| = \sup_{\substack{t>0\\ x\in B}} \left| \int_{\tilde{B}^c} (\varphi_t(x-y) - \varphi_t(x_0-y))(f(y) - f_{\tilde{B}}) dy \right|$$

$$\le c\|f\|_{w*} \frac{w(B)}{|B|},$$

所以

$$\int_B |\tilde{M}(f)(x) - (a_B + \tilde{M}(f_3)(x_0))| dx = \int_B \left| \sup_{t>0} \varphi_t * f(x) - (a_B + \varphi_t * f_3(x_0)) \right| dx$$

$$\le \int_B \sup_{t>0} [|\varphi_t * f_2(x)| + |\varphi_t * f_3(x) - \varphi_t * f_3(x_0)|] dx$$

$$\le \int_B \sup_{t>0} |\varphi_t * f_2(x)| dx + |B| \sup_{\substack{t>0\\ x\in B}} |\varphi_t * f_3(x) - \varphi_t(f_3)(x_0)|$$

$$\le c\|f\|_{w*} w(B) + |B| \sup_{\substack{t>0\\ x\in B}} \left| \int_{\tilde{B}^c} (\varphi_t(x-y) - \varphi_t(x_0-y))(f(y) - f_{\tilde{B}}) dy \right|$$

$$\le c\|f\|_{w*} w(B).$$

定理证毕

参 考 文 献

[1] C. Bentt, R. Devore and R. Sharpley, Ann. Math., 113(1981), 601- 611.

[2] Bejamin Muckenhoupt and Richard L. Wheeden, Studia Math., 54(1976), 221- 237.

[3] **韩永生, 近代调和分析方法及其应用, 科学出版社**, 1988, 26—32.

[4] **邱司纲, 数学研究与评论**, 42(1991), 401—409.

[5] E. M. Stein and G. Weiss, **欧氏空间上的** Fourier **分析(中译本), 上海科学技术出版社**, 1987, 57—58.

Hardy-Littlewood Operators on the Space of Functions of Weighted BMO

Wang Yueshan

(Jiaozuo University, Henan 454151)

Abstract

In this paper, we proved that if $f \in \mathrm{BMO}_w$, $w \in A_\infty$ and $\inf M(f)(x) < \infty$, then $M(f)$ is also in BMO_w and there is a constant C independen of f such that $\|Mf\|_{w*} \le C\|f\|_{w*}$.

Keywords maximal operators, boundedness of weighted BMO, weight functions